Juhász András, Szegeczky Tibor

Kinematikai feladatok grafikus értelmezése és megoldása

Módszertani segédanyag a 9. évfolyam
fizika kerettantervi anyagához

Öveges József Tanáregylet
Katolikus Pedagógiai Szervezési és Továbbképzési Intézet

2001. szeptember

Tartalomjegyzék

1. Módszertani ajánlások a mozgástan tanításához **7**
1.1. A vonatkoztatási rendszer . . . 7
1.2. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás . . . 7
1.2.1. Kísérleti vizsgálat, grafikus ábrázolás . . . 8
1.2.2. Feladatmegoldás grafikus segítséggel . . . 11
1.3. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás . . . 12
1.3.1. A mozgás kísérleti vizsgálata . . . 12
1.3.2. Feladatmegoldás grafikus segítséggel . . . 15

2. Feladatok **16**
2.1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás . . . 16
2.2. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás . . . 35
2.3. Dinamikai feladatok . . . 51

Irodalomjegyzék

[DRS] Dér–Radnai–Sós: Fizikai feladatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[SzkiÖF] Szakközépiskolai összefoglaló feladatgyűjtemény, Fizika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[KözFiz] Moór Ágnes: Középiskolai fizikapéldatár, Cser Kiadó, Budapest, 2000.

[FFF] Dr. Berkes József, Dr. Kotek László, Lóránt Jánosné: Felkészítő feladatok fizikából, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[FKF] Bonifert Domonkosné, Dr. Halász Tibor, Miskolczi Józsefné, Molnár Györgyné: Fizikai kísérletek és feladatok általános iskolásoknak. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[KI] Károly Ireneusz fizika tanulmányi verseny a katolikus egyházi gimnáziumok számára, Miskolc, 2001.

Bevezetés

A 2001 szeptemberében bevezetett kerettanterv szerint a mechanika középszintű oktatása a 9. évfolyamon mozgástannal kezdődik. Jól kiválasztott kísérletek és mindennapi példák segítségével a szükséges alapfogalmak bevezethetőek, a fizikai mennyiségeket definiáló képletek megtaníthatóak. A nehézséget sokkal inkább a fizikai gondolkodás iskolájának tartott probléma- és feladatmegoldás jelenti. A diákok matematikai tudása, számolási rutinja ugyanis a 9. év elején nem elegendő a gimnáziumban szokásos feladatmegoldáshoz. Nehézséget okoz a fizikai probléma matematikai egyenletekkel történő felírása éppúgy, mint az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek kezelése, amely már a legegyszerűbb egyenletes mozgások feladataiban is gyakran előfordul. A gyorsuló mozgással kapcsolatos feladatok megoldása a szokásos rutinnal lehetetlen, hiszen a tanulók nem ismerik még a másodfokú egyenlet megoldóképletét. A fenti nehézségek ellenére sem mondhatunk le azonban a feladatmegoldásról. Ha ezt tennénk, diákjaink a természettudományos gondolkodás megértésével lennének szegényebbek.

Kiadványunk a kinematikai problémák megértésének hatékony segítésére és a feladatok megoldásában jelentkező matematikai hiányok kikerülésére ajánl hatékony módszert: *a mozgások grafikus ábrázolását.* A kiadvány első fejezetében olyan kísérleteket, fogalombevezetési módokat ajánlunk, amelyek jól megalapozzák, előkészítik a problémák grafikus ábrázolását, illetve a grafikus ábrázoláson alapuló feladatmegoldást. A kiadvány második fejezete egyszerűbb- nehezebb feladatokat gyűjt össze (ezek jó része természetesen nem ismeretlen a fizikatanárok előtt), és bemutatja a feladatok grafikus ábrázolás segítségével történő megoldását. Jól tudjuk, hogy az alábbiakban közölt példák mindegyikének feldolgozására nincs idő, a bővebb választékkal a kollégák munkáját kívántuk könnyíteni.

A feladatok nehézségi fokát a feladat sorszáma után egy vagy több csillaggal ($\star$) jeleztük. Kísérlettel, méréssel kapcsolatos feladatot jelez a $\boxed{\text{K}}$ szimbólum.

A feladatok származási helyét a sorszám mellett, az oldal jobb oldalán szögletes zárójelben található utalás jelzi. Az egyes betűszavak jelentése az *Irodalomjegyzék*ben olvasható. Sok esetben a hivatkozott feladatokat csak ötletként használtuk fel, és adataikat egyszerű számítástechnikai okokból módosítottuk, hogy a grafikus módszerekhez jobban illeszkedjenek.

A mozgástani fogalmak bevezetéséhez, a feladatok megoldásához alkalmazott grafikus ábrázolás a kinematikán túl hasznos segítséget jelent sok bonyolultabb dinamikai feladat megoldásában is. Ilyen mintapéldákat közlünk a kiadvány utolsó szakaszában.

A fizika iránt érdeklődő, fizikából felvételire készülő diákok a 11–12. évfolyamon külön órakeretben készülnek fel az érettségire és a felvételire. E felkészítő kurzus során meg kell mutatni a tanulóknak és gyakoroltatni kell velük a kinematikai feladatok analitikus megoldásának módszereit is.

1. fejezet

Módszertani ajánlások a mozgástan tanításához

1.1. A vonatkoztatási rendszer

A kinematika középiskolai tanítása során általában nem kell nulláról indulnunk. A gyerekek köznapi ismeretei és az általános iskolában szerzett tárgyi tudása jelenti az alapot, ahonnan a gimnáziumban tovább haladunk.

A vonatkoztatási rendszer egyértelmű, *tudatos* rögzítése a mozgások tárgyalásának első lépése. A lényeget jól megértethetjük, ha feltesszük például a következő egyszerű, konkrét kérdést: „Egy hangya 3 cm-t mászott egyenesen, hol van most?" A diákok természetesen jól érzik, hogy e kérdésre csak akkor adható válasz, ha ismert az egyenes, amely mentén haladt; tudjuk, hogy merre mászott az egyenes mentén; és hol volt, amikor indult. E bevezetés után levonható a szabály: a továbbiakban minden kísérlet, mérés, feladat esetén az első lépés a vonatkoztatási rendszer rögzítése. Az egyenes vonalú mozgások esetén ez a viszonyítási pont megadását, valamint a pozitív és negatív irány kiválasztását jelenti, a hajításoknál a síkbeli derékszögű koordinátarendszert. Három dimenziós mozgásokat a középiskolai kinematikában nem tárgyalunk. A tanítás során fontos hangsúlyozottan kimondani, hogy a viszonyítási rendszer origóját mely konkrét tárgyhoz rögzítjük. A viszonyítási rendszer választásának szabadságát egyszerű konkrét példákon mutathatjuk be, érzékeltetve, hogy a mozgás bármely választás esetén leírható. A különbség csak abban áll, hogy ügyesebb választás esetén a leírás egyszerűbb, míg más választás esetén bonyolultabb lehet.

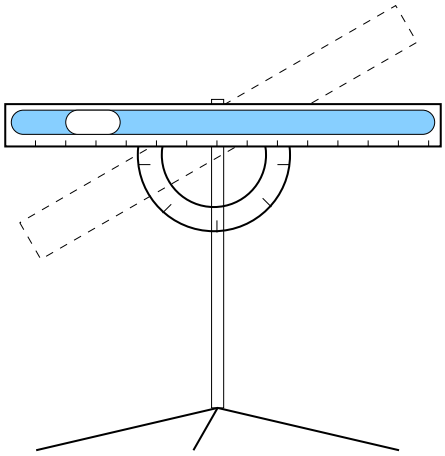
A középiskolában a jelenségeket inerciarendszerben tárgyaljuk. Ezt a kinematikában természetesen nem deklaráljuk, de a gyakorlatban így járunk el. Kihasználjuk, hogy a természetes gondolkodás azt kívánja, hogy a vonatkoztatási rendszert valamely triviálisan nyugvó tárgyhoz rögzítsük. Ezen a szinten az egyenletesen mozgó vonatkoztatási rendszert is jobb, ha elkerüljük és csak az inerciarendszert meghatározó dinamikai ismeretek után, például év végi összefoglalás vagy érettségire felkészítő fakultáció során használjuk (lásd a 19. feladatban).

1.2. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás fogalmával a diákok már az általános iskolában foglalkoztak. Egyszerűbb feladatokkal is találkoztak, például a matematikai „nyitott mondatok" körében. A középiskola 9. osztályában a hozott ismereteket elevenítjük fel és egészítjük ki. Az év eleji „kikérdezéses" módszerrel történő ismétlés helyett ajánljuk, hogy mindjárt egy kísérlettel indítsunk. Erre az egyenletes mozgás Mikola-csöves vizsgálatát ajánljuk, tanári mérőkísérlet formájában, de a tanulókat aktivizáló frontális feldolgozással. A mérés és a kiértékelés során jó alkalom adódik az általános iskolából hozott ismeretek feltérképezésére, átismétlésére és némi kiegészítésére is.

1.2.1. Kísérleti vizsgálat, grafikus ábrázolás

A Mikola[1]-cső (1.1. ábra) az egyenletes mozgás kísérleti vizsgálatára alkalmas egyszerű taneszköz. Nem más, mint egy 1 méter hosszú fa vagy fém rúdra rögzített, festett vízzel majdnem teljesen megtöltött és lezárt üvegcső. A csőben mintegy körömnyi levegőbuborék mozoghat. Ha a csövet megbillentjük, a buborék felfelé mozog



1.1. ábra. A Mikola-cső

a csőben. A buborék mozgásának egyenletességéről meggyőződhetünk, ha egyenlő időközönként megjelöljük a mozgó buborék pillanatnyi helyét a csövet tartó rúdon. A jelölést célszerű krétával, egyenletesen kattogó metronóm[2] ütéseire megtenni. A buborék mozgási sebessége függ a cső meredekségétől. A meredekséget célszerű feltámasztással vagy a csövet tartó rúdra szerelt tengely befogásával változtatni. Beszerezhető[3] olyan Mikola-cső is, amelynek rúdján szögmérő szolgál a dőlésszög pontos megállapítására[4] (1.1. ábra).

Végezzünk két különböző dőlésszög mellett egy-egy mérést a Mikola-csővel, és ábrázoljuk a mérési eredményt elmozdulás–idő grafikonon! A krétajelek távolságát a cső végétől könnyen leolvashatjuk a cső mellé fektetett cm-skála segítségével. Az idő múlását metronómütés-egységekben mérjük. A mérés kezdőpillanatának pontos meghatározása azonban nem egyszerű, hiszen a buborék indítását nehéz pontosan szinkronizálni a metronómmal. A bizonytalanság elkerülésére az idő múlását – önkényesen – az első krétajelhez tartozó metronómütéstől számítjuk. Ilyen módon a $t = 0$ pillanatban a buborék már valamekkora s_0 távolságra van a helymérés kezdőpontjától. Ezután a hely- és időadatok összerendelése már könnyen megtehető. Ne fejezzük be az értékpárok rögzítését a mozgás végén, hanem folytassuk még néhány metronóm-ütés idejéig. Ez utolsó pontok esetében a buborék helye változatlan (a cső felső vége), de az idő telik.

A grafikus ábrázolás első lépéseként az adatokat értéktáblázatba foglaljuk össze.

Ezután koordináta-rendszert rajzolunk, nevesítjük a tengelyeket, majd a tengelyek metrikáját rögzítjük. (A tanulók többsége valószínűleg gyakorlatlan a függvényábrázolásban, ezért célszerű tanári irányítással dolgozni. A gyerek a kockás füzetében ugyanazt kell, hogy csinálja, mint a tanár a táblán, vagy a füzetkockás írásvetítőfólián. Természetesen a diákokat a grafikon méretének és az egység célszerű megválasztásának rögzítésében is irányítani kell!) Az elmozdulástengelyen érdemes azonnal megjelölni a cső teljes hosszát. Ezután a mérési pontokat jelöljük be. A metronómütések pillanatában a buborék helyét mutató krétajelek távolsága közel egyenletesen változik. Ennek alapján megfogalmazható az egyenletes mozgás jellemzője: *az egyenletes mozgást végző test egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg.* Kísérletünkben természetesen a buborék csak korlátozott tartományban mozog, a cső végén megáll annak ellenére, hogy a metronóm tovább üt. A mérési adatok emelkedő pontsorára egyenest illesztve megkapjuk a buborék mozgásának út–idő grafikonját. Elvégzett mérési eredményt közöl az 1.2. ábra.

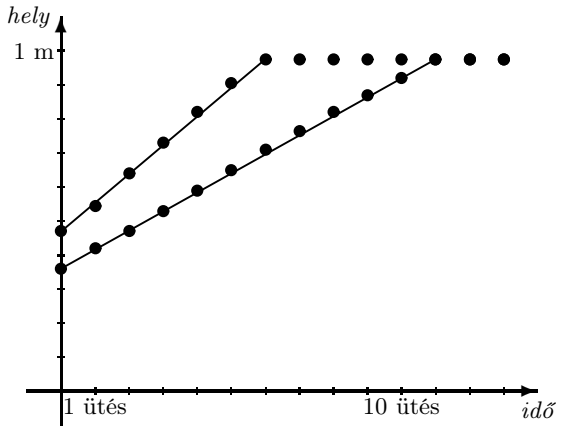
A grafikon a diszkrét mérési pontokra húzott folytonos függvény. A grafikonról leolvasható a buborék helye

[1] **Mikola Sándor** a Fasori Evangélikus Gimnázium legendás fizikatanára, majd igazgatója, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, több demonstrációs kísérleti eszköz kifejlesztője

[2] Ha nincs az iskolában hagyományos metronóm, helyettesíthetjük azt egyszerűsített „házi” változatával. Ehhez hosszú fonálra függesztett, nagyobb tömegű ingatesttel ingát készítünk. Az ingatestről 1-2 cm-es cérnán egy kis fémtárgy, pl. anyacsavar vagy szög lóg le. A nyugalomban lévő ingatest alá egy fém- vagy üvegpoharat helyezünk el úgy, hogy pereme a lelógó tárggyal érintkezzen. A mozgó inga minden félperiódusban jól hallhatóan megüti a poharat.

[3] Arkhimédész Bt., 1117 Budapest, Irinyi József utca 36.

[4] A papírkereskedésekben kapható papír szögmérők is jól használhatóak.



1.2. ábra. A Mikola-cső buborékjának út–idő grafikonja, két dőlésszög esetén

tetszőleges pillanatban (pl. a harmadik és a negyedik metronómütés között félidőben, vagy akár a tizedik ütés pillanatában – amikor a mozgás már befejeződött).

A sebesség meghatározása

Az általános iskolai ismeretek alapján értelmezhető a grafikon meredeksége, ami a buborék sebességét ($v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$) adja meg; és tengelymetszete (s_0), ami a buborék helyét jelzi a mérés kezdeti pillanatában. A két különböző meredekségű cső-állásnál végzett mérés út–idő grafikonját célszerű ugyanabban a koordináta-rendszerben ábrázolni (1.2. ábra), így azok jól összehasonlíthatóak. A két különböző dőlésszögű mérés grafikonja eltérő meredekségű, ami a buborékok eltérő sebességére utal. A tengelymetszetek különbsége a buborék indítási bizonytalanságából adódik. Hívjuk fel a gyerekek figyelmét, hogy a grafikonok a tengelymetszetükben és a meredekségükben különböznek, azaz *az egyenes vonalú egyenletes mozgás meghatározásához két fontos adat szükséges*: a sebesség és a mozgó test távolsága a viszonyítási ponttól a mozgás kezdőpillanatában. A grafikus ábrázoláshoz kapcsolódva érdemes felidézni az általános iskolai matematikai ismereteket az egyenes arányosságról és az azt ábrázoló egyenesről. Az egyenletes mozgás jellemzőjét ennek segítségével is megfogalmazzuk: *az egyenletes mozgást végző test elmozdulása arányos az idő múlásával.* A sebesség megadásához a mérőszám mellett a mértékegység is szükséges. Ezen a ponton érdemes kiegészíteni az általános iskolai anyagot: a sebesség hivatalos SI mértékegysége mellett néha más egységeket is használhatunk. Mivel esetünkben Δs értékét centiméterben, Δt értékét metronómütés-egységben mértük, a sebesség mértékegysége magunk-választotta „önkényes” egysége a $\frac{\text{cm}}{\text{metronómütés}}$. Természetesen ezt – már csak a gyakorlás és ismétlés kedvéért is – érdemes átszámíttatnunk a szokásos $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ egységre! (Az átszámítás alapja a metronóm hitelesítése, azaz 10-15 ütés időtartamának lemérése stopperrel. Ne felejtsük el felhívni a figyelmet, hogy az ütések számolását 0-val kezdjük! Fontos, hogy a bevezető tanári mérés feltétlenül előzetes kipróbálást kíván, hiszen enélkül a véletlenszerűen beállított dőlésszögek esetén a sebességkülönbség nem lesz elég szignifikáns!)

A Mikola-csővel végzett tanári mérés és annak közös feldolgozása után az önkéntesen vállalkozó diákok számára jó feladat a buborék sebességének meghatározása a cső teljes dőlésszög-tartományában, 10-15 fokonként. Az általunk végzett mérés eredménye az 1.1. táblázatban, illetve az 1.3. ábrán látható. A feladat érdekessége az, hogy a buborék sebességének a dőlésszög függvényében – a diákok számára váratlanul – maximuma van.

Az átlagsebesség meghatározása

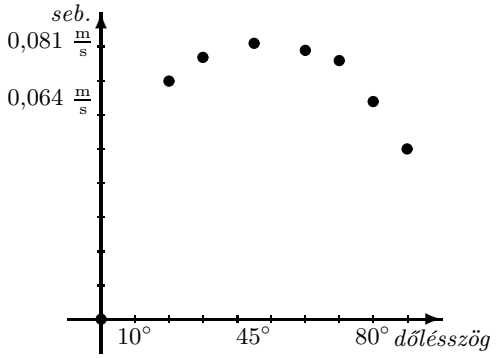
Az átlagsebesség fogalmát a tanulók már az általános iskolában megismerik, mégis gyakori, hogy a fizikai fogalmat összetévesztik a sebességek számtani középértékével. Az átlagsebesség fogalmának felelevenítése, illetve tisztázása fontos feladat a 9. évfolyamon. A Mikola-cső segítségével ez is egyszerűen megtehető.

Indítsuk a mérést kis meredekségű csővel! Néhány mérési pont felvétele után, két metronómütés közti időben billentsük meredekebbre a csövet, és folytassuk a buborék helyének bejelölését az ismétlődő ütésekre. A buborék mozgása most egy lassabb és egy gyorsabb szakaszból tevődik össze. Az út–idő grafikont az 1.4. ábra mutatja.

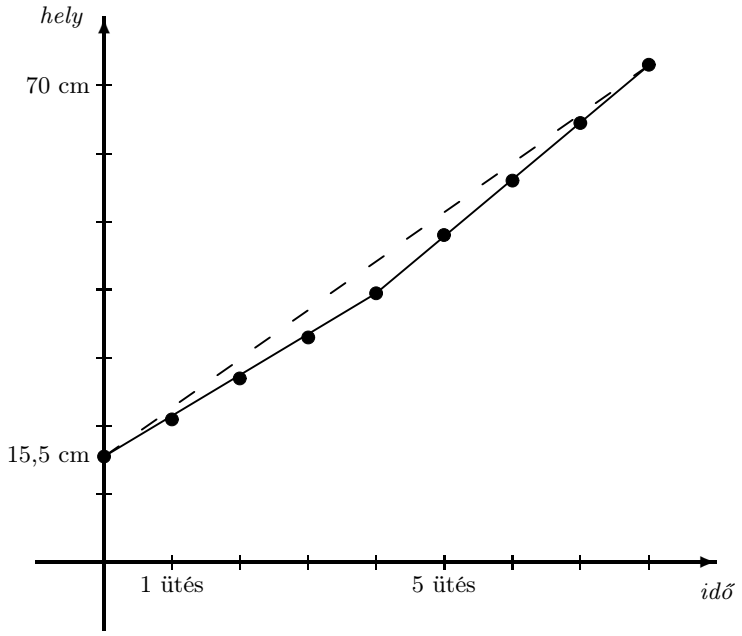
A sebességek külön-külön meghatározása után határozzuk meg az átlagsebességet! Hangsúlyozzuk, hogy itt egy olyan buborék sebességének kiszámításáról van szó, amely egyenletesen haladva pontosan ugyanannyi idő alatt érne a cső elejétől a cső végéig, mint az a vizsgált buborék, amely útjának első részét lassabban,

1.1. táblázat. A buborék sebessége különböző dőlésszögek esetén

Dőlésszög	Sebesség
0°	0 $\frac{m}{s}$
10°	0,066 $\frac{m}{s}$
20°	0,07 $\frac{m}{s}$
30°	0,077 $\frac{m}{s}$
45°	0,081 $\frac{m}{s}$
60°	0,079 $\frac{m}{s}$
70°	0,076 $\frac{m}{s}$
80°	0,064 $\frac{m}{s}$
90°	0,05 $\frac{m}{s}$



1.3. ábra. A buborék sebessége a dőlésszög függvényében



1.4. ábra. Az átlagsebesség értelmezése

második részét gyorsabban tette meg. Rajzoljuk rá a mérési eredményeinket tartalmazó grafikonra az átlagsebességgel mozgó képzeletbeli buborék grafikonját, és határozzuk meg az átlagsebesség nagyságát! Mutassuk meg, hogy az így kapott átlagsebesség nem a két korábban meghatározott részsebesség számtani közepe! A mindennapi életben tapasztalt mozgások között igen ritka az egyenes vonalú egyenletes mozgás. A valóságban

a mozgó testek sebessége nem pontosan állandó, mégis nagyon sokszor annak tekintjük őket, azaz a mozgást az átlagsebességgel jellemezzük.

Az egyenletes mozgás út–idő grafikonjáról a mozgás minden jellemzője leolvasható. A sebesség–idő grafikon megrajzolása azért fontos, mert ezzel készítjük elő a változó mozgásnál alapvető ábrázolást.

Az egyenletes mozgás sebesség–idő grafikonja az időtengellyel párhuzamos vízszintes egyenes. Ha a sebesség az elmozdulástengelyen kijelölt pozitív irányba mutat, a sebességegyenes a koordináta-rendszer pozitív negyedében van, ha a sebesség a negatív irányba mutat, a vízszintes egyenes az időtengely alatt fut. Az egyenes alatti terület az egyenletesen mozgó test által megtett útszakaszt adja meg.

1.2.2. Feladatmegoldás grafikus segítséggel

A fizikai feladatok megoldásának elsődleges célja a megtanult összefüggések, törvények alkalmazása egy-egy jól kiválasztott, sokszor erősen leegyszerűsített konkrét jelenség leírására. A feladatmegoldás első lépése az adott probléma megértése és „lefordítása” a fizika absztrakt nyelvére. Ezután következik a megoldás, ami általában matematikai számításokat kíván. A diákok számára a szavakkal leírt jelenségek vagy folyamatok megértése, pontos fizikai megfogalmazása jelenti a legnagyobb problémát. Ez gyakran jó tanulóink esetében is fennáll. Ők matematikai érzékükre hagyatkozva, vagy a típuspéldák algoritmusaira, az éppen tanult képletek ügyes formális alkalmazására alapozva „jól” megoldják a feladatokat, anélkül, hogy igazán megértették volna azok fizikai lényegét. A kinematikai feladatok grafikus ábrázolása hatékony módszer a problémák lényegének megértetésére, a gondolkodás nélküli formális megoldások elkerülésére. Az egyenletes mozgással kapcsolatos feladatok grafikus ábrázolásának elsődlegesen a probléma mélyebb megértetése a lényege. Az ábrázolás a kisebb számolási rutinnal rendelkező, lassabban gondolkodó gyerekek számára is hasznos segítség. Az ábrázolás készségének kialakítása után a tanuló a grafikon rajzolása során lépésről lépésre haladva könnyebben megérti a probléma lényegét, jobban meglátja a kérdéseket, mintha azonnal matematikai formulákat kellene felírnia. A jó grafikus ábrázolás segít az egyenletek felírásában és a számolásban is.

A grafikus feladatmegoldás alapja a mozgás és a grafikus ábrázolás lényegi kapcsolatának megértetése. A fentebb leírt Mikola-csöves mérés grafikus ábrázolása e folyamatban az első lépést jelentheti. Ezt kell követniük azoknak az egyszerű feladatoknak, amelyek a mozgásfolyamat, illetve mozgásfolyamatok szóbeli elmondása alapján kérik a grafikus ábrázolást. Hasonló ehhez a fordított feladat, amelyben közölt grafikon információit kell szóban megfogalmazni.

A legegyszerűbb kinematika-példákban egyetlen tárgy vagy személy mozgását vizsgáljuk. Általában a mozgó objektum kiterjedése elhanyagolható a feladatban szereplő távolságokhoz képest, ezért a mozgó test egyetlen mozgó pontnak tekinthető. A grafikus ábrázolás nagyon egyszerű, ha néhány szabályt és definíciót megtanulnak a diákok:

- A grafikon origóját valamely nyugvó tárgyhoz rögzítenünk kell, és ezt mindig hangsúlyozva mondjuk is ki!
- Ki kell jelölnünk a mozgás egyenese mentén a pozitív és a negatív irányt.
- Ha szükséges, meg kell adni a koordinátatengelyek metrikáját.
- Az egyenletes mozgás képe az út–idő diagramon mindig egyenes.
- A mozgás sebességét az egyenes meredeksége adja meg: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.
- Az egyenes tengelymetszete a mozgó test pillanatnyi s_0 helyét (a viszonyítási ponttól mért távolságát) jelöli a vizsgálatunk kezdetén ($t = 0$ pillanatban).
- A feladatmegoldás során a grafikonra be kell rajzolnunk minden ismert adatot és a meghatározandó mennyiséget is.
- Az egyenletes mozgás sebesség–idő grafikonja az időtengellyel párhuzamos, vízszintes egyenes.
- A sebesség–idő grafikon alatti terület a mozgó test által megtett utat adja meg.

A feladatok nehezebb körét jelentik azok a példák, ahol a történésnek több álló vagy mozgó szereplője van, esetleg a mozgó objektumok nem tekinthetők pontszerűnek (pl. hosszú menetoszlop). Az ilyen feladatok megoldása szintén a korábbi szabályokkal történik, de úgy, hogy a koordináta-rendszerben minden lényeges szereplő mozgása, ezek helyzet- és időbeli viszonyai is kifejezésre jussanak. Az alábbiakban a feladatok közül az összetettebb, nehezebb példákat csillaggal ($\star$), esetenként több csillaggal jelöltük meg.

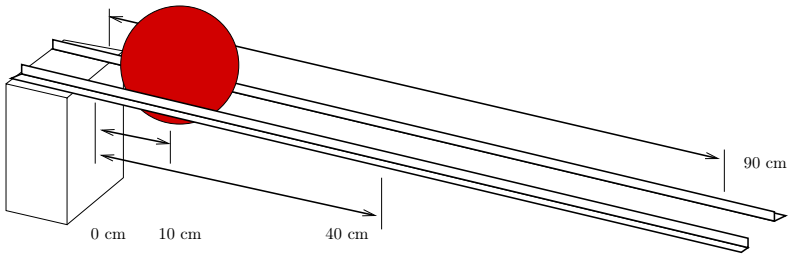
1.3. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Az általános iskolában a diákok konkrét kísérleti példákon keresztül foglalkoztak az egyenletesen változó mozgással, és ennek egy speciális eseteként a szabadeséssel. A mozgás kvalitatív jellemzésén, a sebesség változásának felismerésén, és erre alapozva a gyorsulás fogalmának kialakításán volt a hangsúly. Az egyenletes mozgás négyzetes út–idő összefüggése nem alapvető követelmény az általános iskolában. A 9. évfolyamon természetesen támaszkodunk az általános iskolából hozott alapismeretekre, de a témakört bevezető tanári mérőkísérlettel ajánljuk kezdeni (hasonlóan az egyenletes mozgás fentebb leírt tárgyalásához). A mérés feldolgozása során mód nyílik a korábbi ismeretek felidézésére és egyúttal érdemi kiegészítésükre, pontosításukra is. Ezt a továbbiakban újabb kísérletek, probléma- és feladatmegoldások egészítik ki és mélyítik el. Mivel a másodfokú egyenletekkel 9. osztályban még nem foglalkozik a matematika, a feladatmegoldást csak jól kiválasztott, grafikus módszerekkel megoldható feladatokra kell korlátoznunk. Ennek alapjait az egyenletes mozgás tárgyalásakor teremtettük meg, és a gyorsuló mozgás feldolgozása során is szem előtt tartjuk.

1.3.1. A mozgás kísérleti vizsgálata

Az alapmérés

Bevezető kísérletként egy igen egyszerű (a legszegényebb iskolában is bemutatható) mérőkísérletet ajánlunk. Vizsgáljuk egy golyó (haladó) mozgását lejtőn!



1.5. ábra. Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás kísérleti vizsgálata

A mozgás lassúbb – és ezért pontosabban vizsgálható –, ha a golyó nem egyszerűen egy lejtős síkon gurul, hanem két lejtős sínre támaszkodva. A lejtőt két darab, egyenként 1-1,5 m hosszú szögvasból célszerű elkészíteni. Minél közelebb van a két vezető sín távolsága a gömb átmérőjéhez, azaz minél mélyebben lóg be a golyó a sínek közé, annál lassabb a haladó mozgás. A mérésnél fordított módon járunk el, mint a Mikola-csöves kísérletben, mert a begyorsult golyó helyének megjelölése krétával nagyon bizonytalan. Itt előre kijelölünk a sínen távolságokat és stopperrel mérjük a kijelölt útszakaszok megtételéhez szükséges időt. A négyzetes úttörvénynek megfelelően célszerű az utakat négyzetes aránynak megfelelően kijelölni. Az 1.5. ábra a kísérleti összeállítást, az 1.2. táblázat az általunk végzett mérés adatait és az 1.6. ábra az ezek alapján készített út-idő grafikont mutatja. (A méréseket széles nyomtávú szögvas-síneken gördülő biliárdgolyóval végeztük.)

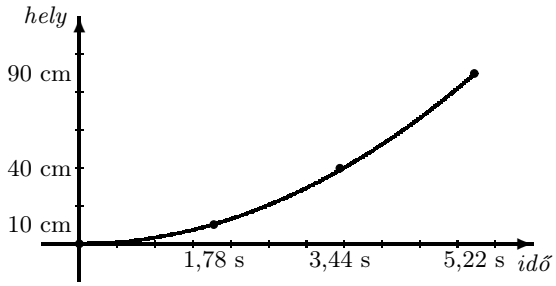
1.2. táblázat. A gyorsuló mozgás vizsgálatának mérési eredményei

Út	10 cm	40 cm	90 cm
Idő	1,78 s	3,44 s	5,22 s

A kísérlet alapján először a legegyszerűbb kvalitatív megállapítást kell megfogalmaznunk: *a golyó sebessége folyamatosan nő, a golyó gyorsul.* Ezután fogunk hozzá a mennyiségi vizsgálathoz. Mutassuk meg, hogy jó közelítéssel igaz az, hogy az indulástól számított első útszakasz idejét viszonyítási alapul véve a négyszeres út megtételéhez kétszeres, a kilencszeres út megtételéhez háromszoros idő szükséges. A tapasztalati eredményt matematikai formában általánosítva írjuk fel: $s = s(t^2)$.

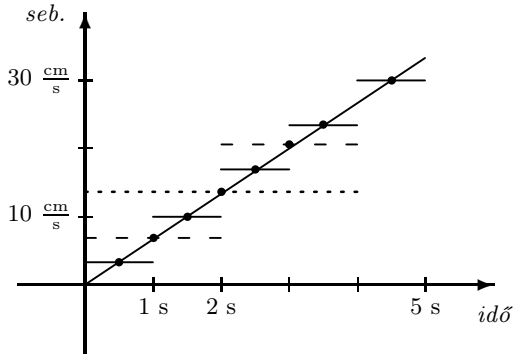
A pillanatnyi sebesség

Az egyenletes mozgás tárgyalásakor értelmeztük már grafikusan az átlagsebességet. A változó mozgás út-idő grafikonjára (1.6. ábra) rajzoljuk be szakaszonként az átlagsebességnek megfelelő egyeneseket! (Mivel a diákokat meg kell tanítani a grafikus munkára, ajánljuk, hogy a tanár füzet-kockás írásvetítő-fóliára együtt



1.6. ábra. A lejtőn guruló golyó út–idő grafikonja

dolgozzon a tanulókkal. Egységesítsék a grafikon méretét, a füzet kockáinak út-, illetve időértékét, mutassa meg az átlagsebesség egyenesének berajzolását és a meredekség leolvasásának módját!) A munkát ezután célszerű úgy szervezni, hogy a diákok több csoportban önállóan dolgozzanak. Minden csoportnak mondjuk meg, milyen időintervallummal dolgozzon! A legügyesebbek dolgozzanak rövid időszakaszokkal, pl. másodpercnyi időkkel, a többiek nagyobbakkal. A végén az eredményeket közösen összesítjük. Az átlagsebesség–idő diagramot a tanár az írásvetítőn, a diákok saját füzetükben készítsék el. Az 1.6. ábra alapján megszerkesztett sebesség–idő grafikont mutatja az 1.7. ábra.



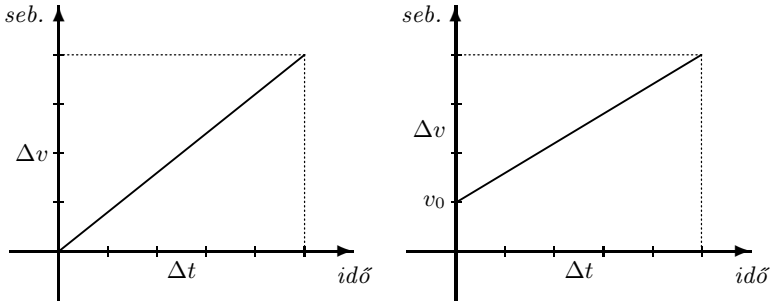
1.7. ábra. A gyorsuló mozgás átlagsebesség–idő diagramja

Az út–idő grafikonról leolvasott átlagsebességeket lépcsőszerűen emelkedő, vízszintes szakaszok jelzik. Az 1.7. ábrán az 1 másodpercnyi, 2 másodpercnyi és 4 másodpercnyi időtartamokhoz tartozó átlagsebességeket tüntettük fel. Jellemzője a mozgásnak, hogy az „átlagsebesség-lépcsők” felezőpontjait összekötve origóból kiinduló egyenest kapunk, függetlenül az időintervallum nagyságától. A grafikonon látszik, hogy a legfinomabb időfelbontású lépcső-grafikon tér el legkevésbé a ferde egyenestől. A tapasztalatok alapján könnyen elfogadtatható, hogy egészen finom időfelosztás esetén – amikor az átlagsebesség már a mozgás pillanatnyi sebességének tekinthető – a lépcsőgrafikon és a ferde egyenes egybe esik. Megfogalmazható tehát a vizsgált mozgás jellemzője: *a pillanatnyi sebesség egyenletesen változik az időben.* (Ekkor kap magyarázatot a mozgás elnevezése: „egyenesvonalú egyenletesen változó mozgás”.)

A gyorsulás

Az egyenletesen változó mozgás sebesség–idő grafikonja egyenes. Az egyenes meredekségének jelentése: időegység alatt mennyivel változik meg a test sebessége, azaz mekkora a sebesség változási gyorsasága. Ez a mennyiségnek a *gyorsulás*; $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Ha a mozgó test álló helyzetből indul, akkor sebesség–idő grafikonja egy origón keresztülmenő, a meredekségű egyenes. Ha a testnek már van kezdősebessége, amikor gyorsulni kezd, a mozgás v–t grafikonja a sebességtengelyt a kezdősebességnek (v_0) megfelelő magasságban metsző egyenes (1.8. ábra).



1.8. ábra. A gyorsulás

A sebesség–idő grafikon és a megtett út kapcsolata
A gyorsuló mozgás útképlete

A sebesség–idő grafikonról leolvasható a mozgó test által a gyorsulás kezdetétől megtett út. Ennek megmutatásához az 1.7. ábra lépcsős grafikonjához térünk vissza. Az egyes „lépcsőfokok" alatti téglalapok területének nagyságát a két oldal, azaz a sebesség és az idő szorzata adja, a terület így a mozgó test által megtett útnak felel meg. A gyorsulva mozgó test által megtett utat az egymást követő „lépcsők" alatti terület közelíti. A közelítés annál jobb, minél kisebb időintervallumokra számított átlagsebességekkel számolunk. A nagyon finom felosztású lépcsők alatti terület lényegében megegyezik a ferde sebesség–idő egyenes alatti területtel.

Általánosítva: *a mozgó test által megtett út nagyságát a sebesség-idő grafikon alatti terület mérőszáma adja meg.* Az egyenletesen gyorsuló mozgás sebességgrafikonja lehetővé teszi, hogy a négyzetes út–idő függvény szokásos képletét is felírjuk. (A korábbi kísérleti tapasztalatokra támaszkodva csak a négyzetes arányt állapítottuk meg!) A sebességgrafikon alatti terület háromszög, vagy kezdősebességgel rendelkező mozgás esetén trapéz alakú. Felhasználva, hogy a gyorsítási szakasz végén a test sebessége $v_t = at$, illetve $v_t = v_0 + at$, a megtett útszakaszra

$$s = \frac{a}{2}t^2,$$

illetve

$$s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

összefüggés adódik.

Fontos hangsúlyozni, hogy a sebesség–idő grafikon alapján csak a mozgó test által megtett útszakaszt tudjuk meghatározni, de semmit sem tudunk mondani arról, hogy milyen távol volt a test a mozgás kezdetén a viszonyítási ponttól.

A szabadesés

Az egyenletesen gyorsuló mozgás speciális esete a szabadesés. A szűkre szabott időkeret miatt nem célszerű a részletes kísérleti vizsgálatba belefogni. Elegendő, ha ejtőzsinórral elfogadtatjuk a diákokkal a négyzetes út–idő összefüggést, majd az egyenletesen gyorsuló mozgás grafikus ábrázolását, illetve az út–idő és sebesség–idő képletét kiterjesztjük a szabadesésre, megadva a g nehézségi gyorsulás számértékét. A g közölt számértékének kísérleti igazolását gyakorló feladatnak ajánljuk. Ez történhet a 33. számú feladatban leírtak szerint, vagy akár útsokszorozó ejtőgéppel végzett méréssel[5].

További ajánlott kísérletek és mérések

A leírt, egyszerű bemutató-mérés és annak grafikus feldolgozása alapján végigtárgyalhatjuk az egyenletesen változó mozgás minden lényegi tulajdonságát. Fontos lenne azonban, hogy ne elégedjünk meg csak egy méréssel. A mozgások kísérleti vizsgálatára bő választékot kínál és a legkülönfélébb technikákat ismerteti a *Fizikai kísérletek gyűjteménye*[6] című tanári segédkönyv I. kötete. Igyekezzünk a hétköznapi életből vett kísérleti példákra is alkalmazni a tanultakat. A feladatok közt a kísérlettel kapcsolatos példákat a $\boxed{\text{K}}$ jellel láttuk el.

[5] *Fizikai kísérletek gyűjteménye* I. kötet, I.7. fejezet
[6] A *Fizikai kísérletek gyűjteménye* I., II., III. kötete megrendelhető: Arkhimédész Bt. Budapest 1117. Irinyi József u. 36.

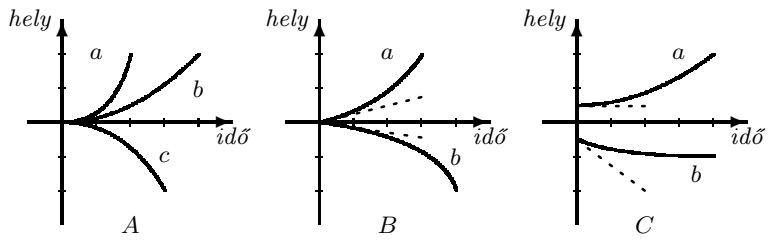
1.3.2. Feladatmegoldás grafikus segítséggel

A gyorsuló mozgásos feladatok megoldásához a grafikus ábrázolás kétszeres segítséget nyújt: egyrészt segít megérteni a feladat fizikai lényegét, másrészt a sebesség–idő grafikon alapján sok esetben lehetővé teszi a gyorsuló mozgás útjának meghatározását anélkül, hogy másodfokú egyenletet kellene megoldani.

A feladatok megoldását általában most is a mozgás út-idő grafikonjának megrajzolásával kezdjük. Ennek első lépése természetesen most is a viszonyítási pont rögzítése, a pozitív és negatív irány kijelölése. A mozgást jellemző parabolaívet sematikusan rajzoljuk meg, de ügyelünk arra, hogy a mozgásról minden lényegeset érzékeltessünk vele.

A parabola állását a gyorsulás előjele szabja meg. Ha a sebesség a kijelölt pozitív irányban nő – a gyorsulás pozitív, ellenkező esetben negatív. A gyorsulás előjelét tehát nem a sebesség számértékének növekedése vagy csökkenése szabja meg! (Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert gyakran alakul ki a diákokban az a téves meggyőződés, hogy a negatív gyorsulás mindig lassulást jelent.) A gyorsulás mértékétől függően a parabolaív laposabb vagy meredekebb.

Ha a test álló helyzetből gyorsul, a mozgás kezdőpontja a parabola csúcsa, ha a 0 időpillanatban a testnek már van kezdősebessége, a parabolaív meredeken kezdődik. A $t = 0$ pillanatban a parabolagörbéhez húzott érintő meredeksége a gyorsuló mozgás kezdősebességét jelöli. Az út–idő görbén természetesen fel kell tüntetni azt is, ha a kezdőpillanatban a test a viszonyítási ponttól távolabb volt. Ilyenkor a mozgást jellemző grafikon a $t = 0$ pillanatban nem az origóban metszi az elmozdulástengelyt. Néhány jellemző út–idő grafikont mutat az 1.9. ábra.



1.9. ábra. Egyenletesen gyorsuló mozgás néhány jellemző út–idő grafikonja

Az ábra A grafikonján az a és a b test álló helyzetből pozitív irányba gyorsul, a gyorsulása nagyobb; c test álló helyzetből indulva negatív gyorsulással mozog, gyorsulásának nagysága a két másik számértéke közé esik.

A B részen a az origóból pozitív kezdősebességről pozitív irányba gyorsuló test; b az origóból negatív kezdősebességről negatív irányba gyorsuló test mozgásának grafikonja. Az a test kezdősebességének számértéke nagyobb.

A C részábrán az origótól pozitív irányba eső helyzetből, kezdősebesség nélkül gyorsulva indul az a test; az origótól negatív kezdőtávolságban, negatív kezdősebességgel mozgó b test fékez – gyorsulása pozitív!

A gyorsuló mozgás, illetve gyorsuló szakaszokat is tartalmazó összetett mozgások út–idő grafikonjainak rajzolásával, értelmezésével foglalkozik a 20. feladat.

Numerikus adatokat tartalmazó feladatok megoldásához a gyorsuló mozgás sebesség–idő grafikonja nyújt segítséget. Ehhez olyan grafikont kell rajzolnunk, amin a feladatban szereplő mennyiségeket is feltüntettük. Az egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség–idő grafikonja mindig egyenes. Az egyenes meredeksége a mozgás gyorsulását fejezi ki. A mozgás kezdősebességét az egyenes tengelymetszete adja. A mozgó test által megtett út az egyenes alatti terület, háromszög vagy trapéz területének kiszámításával adható meg. (Az út kiszámításához tehát nincs mindig szükség másodfokú egyenlet megoldására!)

Egyenletesen gyorsuló mozgásokkal kapcsolatos egyszerű numerikus feladatok a 21., 22. és 26. sorszámok alatt találhatóak. Összetett, gyorsuló mozgásos feladatok a 35. és a 37. példák.

2. fejezet

Feladatok

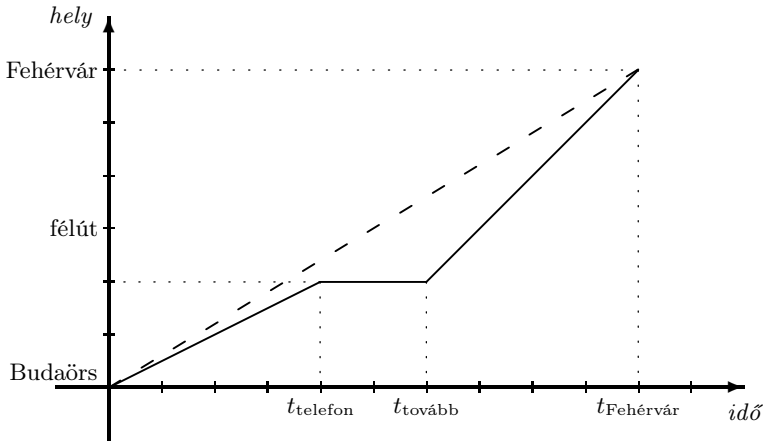
2.1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

1. feladat

„Pista a balatoni autósztráda mellett, a budaörsi benzinkútnál stoppolt. Szerencséje volt, mert egy Székesfehérvárra tartó kocsi megállt és felvette. A vezető kedélyes, nyugodt ember volt, nem túl gyors, egyenletes tempóban vezetett. Még az út felét sem tették meg, amikor hívást jelzett a vezető mobiltelefonja. Mivel nem volt a kocsiban kihangosító, leálltak az út szélén a beszélgetés idejére. A beszélgetést befejezve a sofőr közölte, hogy sietnie kell, és korábbi sebességét megduplázva száguldott a sztrádán egészen Fehérvárig."
Készíts út–idő grafikont a történet alapján! Ábrázold a grafikonon az autó átlagsebességét is!
Rajzold meg a sebesség–idő diagramot is, és erre is rajzold rá az átlagsebességet!

Megoldás:

Rögzítsük a viszonyítási rendszert a benzinkúthoz, ahol Pista stoppol. A pozitív irány legyen a sztráda vonala a Balaton felé. Az időmérést akkor kezdjük, amikor Pista megkezdi útját az autóval.



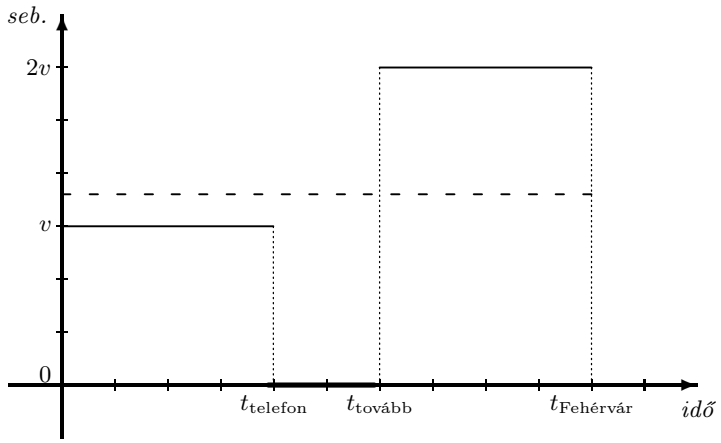
2.1. ábra. Pista útja Székesfehérvárra

A telefon megcsörrenésének időpontja t_{telefon}, a továbbindulásé $t_{\text{tovább}}$, míg Székesfehérvárra $t_{\text{Fehérvár}}$ időpontban ér Pista.

A grafikon (2.1. ábra) egyenes szakaszokból áll, mert a mozgás során minden szakaszban egyenletes sebességgel mozgott az autó, vagy állt. Az állással töltött időben az autó mozgásának képe vízszintes egyenes. A kétszeres sebességű szakasz meredeksége az első szakasz meredekségének kétszerese. A megállás még az út

fele előtt történt. Az átlagsebességet az origótól az utolsó szakasz végpontjába húzott egyenes meredeksége mutatja. Az ábrára ezt az egyenest szaggatott vonallal rajzoltuk.

A sebesség–idő grafikon időegyenese megegyezik az elmozdulás–idő grafikonéval. Az egyes szakaszokon a sebességek állandóak, ezért három vízszintes szakaszt rajzolunk. Az első sebesség v, a második nulla, a harmadik $2v$.



2.2. ábra. Pista sebessége az idő függvényében

Az átlagsebességet olyan vízszintes egyenessel ábrázolhatjuk, ami alatt a terület ugyanakkora, mint a felrajzolt három szakaszból álló vonal alatti terület. Ezt a 2.2. ábrára szaggatott vonallal rajzoltuk.

2. feladat

Egy autós Budapestről Gárdonyba utazik. Egyenletes tempóban halad a 7-es úton. Félúton, Martonvásárban elhalad egy benzinkút mellett, de nem veszi észre, hogy az üzemanyag fogytán van autójában. Csak néhány kilométer múlva pillant a műszerfalra, és ekkor észreveszi, hogy tankolnia kell. Gyorsan megfordul, s szokott tempójával visszamegy a benzinkúthoz. Itt a tankolás mellett egy kávét is megiszik. Fél óra múlva indul tovább, és zavartalanul haladva megérkezik Gárdonyba.
Rajzold fel a történés út–idő és sebesség–idő grafikonját! Mindkét grafikonon ábrázold az átlagsebességet!

Megoldás:

Legyen a viszonyítási pont Budapesten, az indulás helyén, a pozitív irány pedig mutasson innen Gárdony felé. Az időt az indulás pillanatától mérjük.

Az út–idő grafikonon (2.3. ábra) egyenes szakaszok mutatják a mozgás egyes szakaszait, mert minden szakaszon egyenletes mozgást végzett az autó, illetve a benzinkútnál állt.

Az első szakasz az út felénél kicsit tovább tart. A második szakasz negatív meredekségű, mivel az autó visszafelé mozgott. A benzinkútnál álló autót vízszintes szakasz jelzi, a szakasz hossza fél óra. Az utolsó szakasz az elsővel azonos meredekségű.

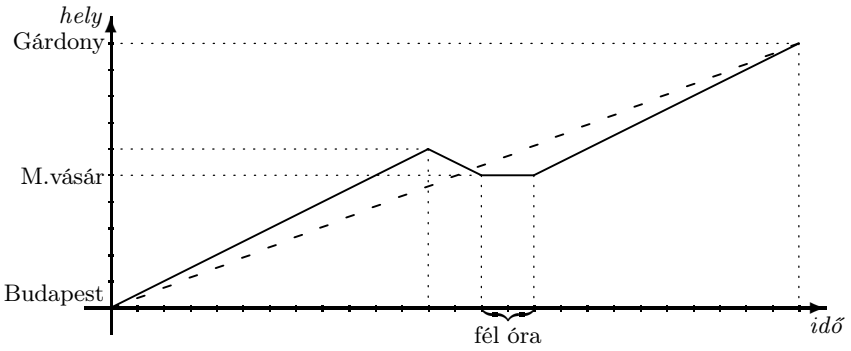
Az átlagsebességet a kezdőpontból a végpontba mutató egyenes meredeksége ábrázolja.

A sebesség–idő grafikonon (2.4. ábra) az első szakasz képe egy vízszintes szakasz az időtengely fölött. A második szakasz grafikonja az időtengely alatt van, mert a sebesség itt negatív. A harmadik szakasz grafikonja rajta van az időtengelyen (a sebesség nulla).

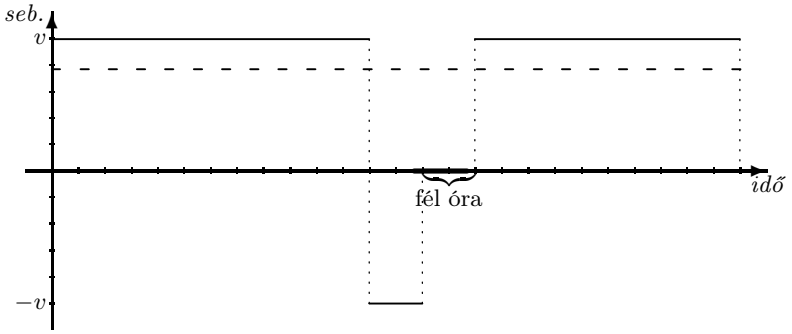
Az átlagsebességet mutató szaggatott vonalat úgy rajzoljuk meg, hogy az alatta lévő terület egyenlő az eredeti grafikon alatti területtel. A negatív sebességű szakasznál a szakaszhoz tartozó terület is negatív, hiszen a terület az időtengely alatt van.

3. feladat

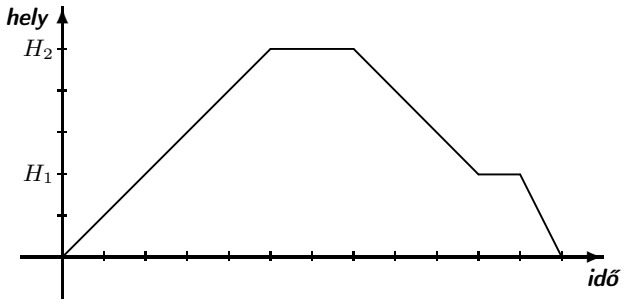
A 2.5. ábrán egy mozgó test út–idő diagramját látod. Találj ki az ábra alapján egy történetet!



2.3. ábra. Az autós út–idő grafikonja



2.4. ábra. Az autó sebesség–idő diagramja



2.5. ábra. A 3. feladathoz tartozó ábra – Vajon mit ábrázol?

Megoldás:

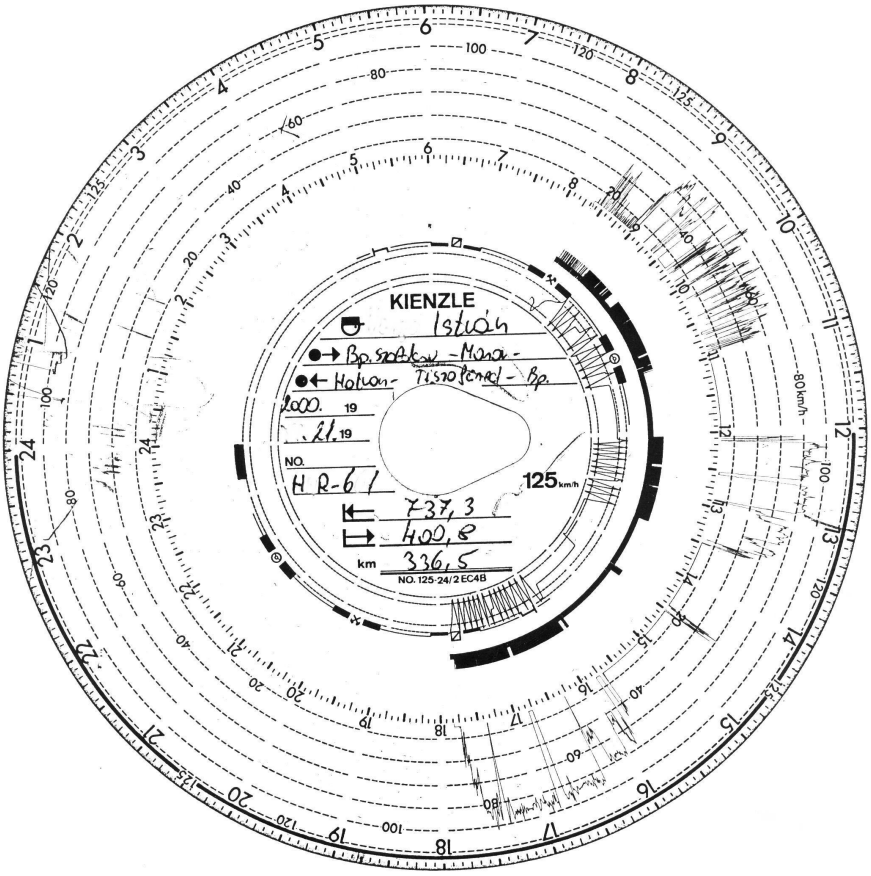
A történet ehhez hasonló lehet: „Julcsi elindult otthonról cipőt venni. A vonatkoztatási rendszer kezdőpontja Julcsi otthonánál van. Elhaladt a lakástól H_1 távolságban lévő kis cipőbolt mellett, mert a H_2 távolságban lévő nagy üzletben akarta a cipőt megvenni. Hosszasan nézelődött, de egyik cipő sem tetszett neki, ezért visszament a kis üzletbe, ahol rövid idő alatt talált egy megfelelő cipőt, s új cipőjében boldogan hazaszaladt."

Fontos a pozitív-negatív irányok, az álló helyzet és az utolsó szakasz nagyobb meredekségének felismerése.

4. feladat

A 2.6. ábrán egy autóbusz sebességrögzítő műszerének (tachográfjának) korongja látható. A busz Budapestről Monoron és Hatvanon át Tiszafüredre ment, majd visszajött. A busz sebessége a korongról leolvasható. A műszerbe helyezett korong 24 óra alatt fordul körbe, s egy írószerkezet a sebességgel arányos jelet rajzol rá. Minél nagyobb a sebesség, annál nagyobb a rajzolt jel távolsága a kör középpontjától. A korongon koncentrikus körök jelzik a sebesség numerikus értékét (20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s léptékben), míg az időadatok

a belső és a külső körökről olvashatók le.
Elemezd a 2.8. ábra alapján a busz mozgását: írd le, hogy milyen események történhettek az utazás közben. Ment-e a busz a megengedettnél gyorsabban? (A korong egy kis részlete a 2.7. ábrán látható felnagyítva. A korong készültekor érvényes szabályok szerint autópályán a megengedett legnagyobb sebesség 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.)

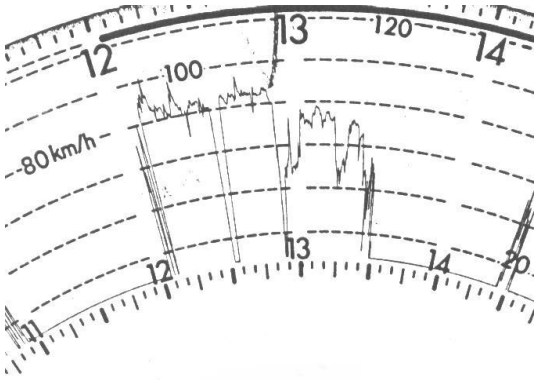


2.6. ábra. Autóbusz sebességíró műszerének egy lapja

Megoldás:

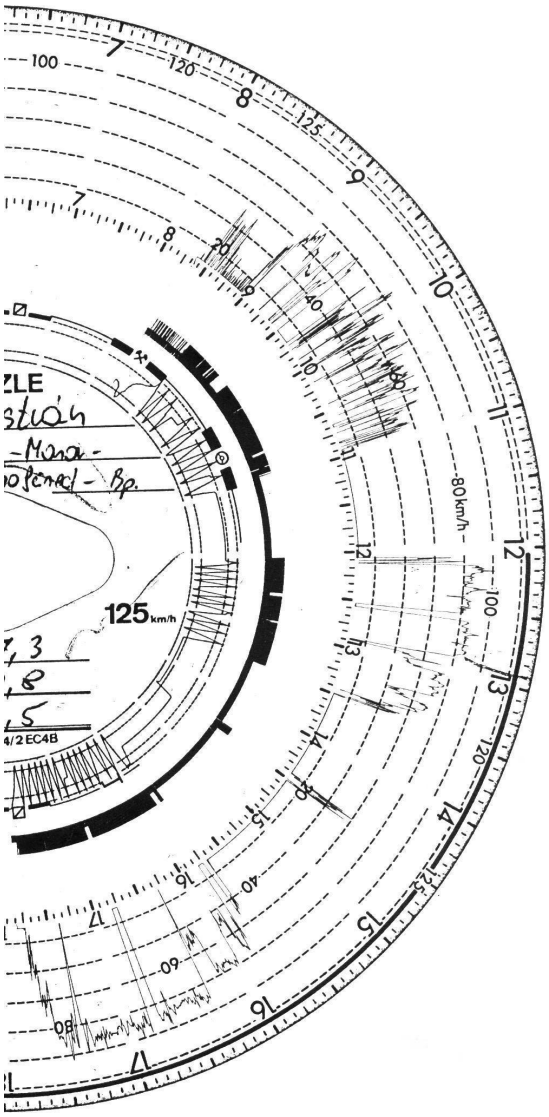
A tachográf-korong egy körtárcsára rajzolt sebesség–idő diagram, ezért ugyanúgy elemezhető, mint a derékszögű koordináta-rendszerbe rajzolt „hagyományos” változat.

Az autóbusz reggel fél kilenc előtt nem sokkal indulhatott el. Az első néhány „tüske” 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ körüli maximális sebességet jelez: a busz a városban haladt, és sokszor rövid megállásokra is kényszerült a piros lámpáknál. Ezután (9 óra előtt) a tüskék alacsonyabbak, amit élénkebb forgalom vagy talán útépítési munkák indokoltak. 9 óra körül – úgy tűnik – gyorsforgalmi útra ért, és néhány további piros lámpa után pontosan fél tízkor érhetett Monorra. Körülbelül tíz percig állt a busz. Lehet, hogy ekkor szálltak fel az utasok, majd újra elindult az autóbusz: 11 óráig valószínűleg alacsony rendű utakon haladt. Ekkor – talán egy korai ebéd kedvéért, Hatvanban – megálltak, és csak délben indultak el újra. Fél egyig megállás nélkül, jó tempóban vezetett a sofőr, minden bizonnyal az M3-as autósztrádán. A fél egy órakor látható rövid megállás egy utas kérésére történhetett: fényképet akart készíteni (2.7. ábra). Egy óra előtt térhettek le a sztrádáról, és valószínűleg a 33-as úton, kisebb sebességgel haladtak tovább. Fél kettőre megérkeztek Tiszafüredre. Itt fél



2.7. ábra. A tachográf-lap egy részlete

háromkor a sofőr rövid utat tett (a grafikon alatti terület mutatja a megtett utat!), talán átállt az utasokkal megbeszélt találkozóhelyre, majd még egy óra pihenés következett. Háromnegyed négykor indultak vissza, először lassabban haladtak, majd az autópályán ismét gyorsabban. Szerencsés volt a visszaút: a városban kisebb volt a forgalom, mint reggel, így alig kényszerült a sofőr megállásra.



2.8. ábra. A tachográf-lap mozgást ábrázoló része

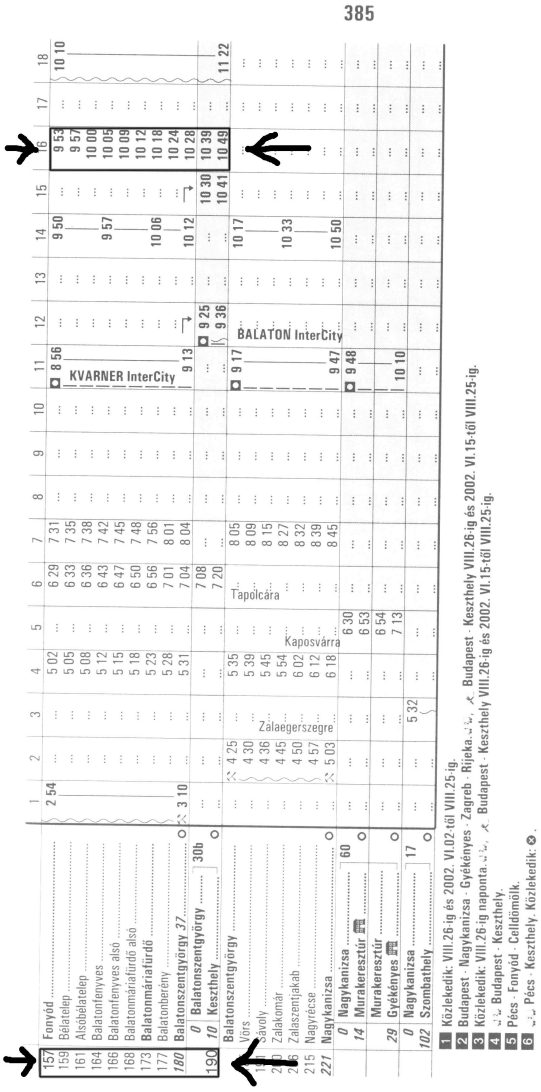
Láthatjuk, hogy egy-két alkalommal a sofőr még 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-fölötti sebességgel is hajtott (talán előzött), de a 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s megengedett maximális sebességet tartósan is átlépte.

Osztályteremben történő feldolgozás esetére ajánljuk a tachográf-korong ábrájának átmásolását kivetíthető fóliára.

5. feladat [KI, 2001. K4.]

A vasúti menetrendből kimásoltunk egy oldalt (2.9. ábra). Az állomások helyét jelölő adatokat az első oszlopban találod, a további oszlopok a vonatok állomásra érkezésének idejét tartalmazzák. A megjelölt oszlop időadatait használva határozd meg a Fonyódról 9 óra 53 perckor induló vonat átlagos sebességét az egyes állomások között, Fonyódtól Keszthelyig. Ábrázold a kapott átlagsebesség-adatokat sebesség–idő diagramon! Rajzold rá a grafikonra a vonatnak az egész útszakaszra vonatkozó átlagsebességét is! Ment-e a vonat a vizsgált útszakaszon 1 $\frac{\text{km}}{\text{perc}}$-nél nagyobb sebességgel?

Megoldás:



2.9. ábra. Az 5. feladathoz tartozó menetrendi részlet

A grafikon megrajzolásához gyűjtsük ki a menetrendből az egyes állomások távolságára és a vonat menetidejére vonatkozó információkat! Az egyes állomások közötti távolság és ezek megtételéhez szükséges idő hányadosa adja a vonat két állomás közti átlagsebességét. Az adatok a 2.1. táblázatban, a sebesség–idő grafikon pedig a 2.10. ábrán látható.

A teljes útra számított átlagsebességet jelző vízszintes egyenes berajzolásához (a 2.10. ábrán szaggatott vonal jelzi) felhasználjuk, hogy a vonat 56 perc alatt jutott el Fonyódtól Keszthelyig, azaz 56 perc alatt 33 km távolságra jutott. Így az átlagsebesség 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

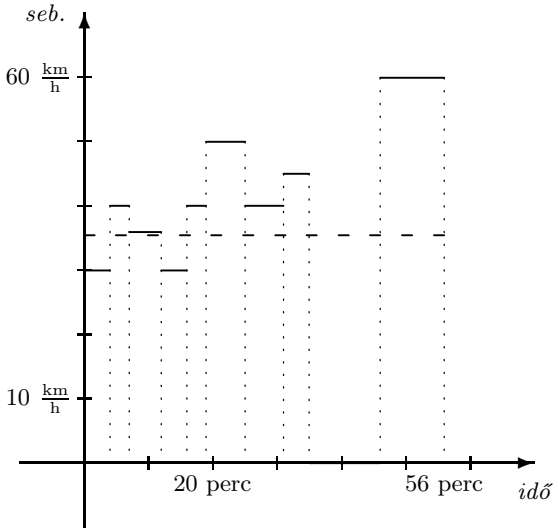
Arra a kérdésre, hogy ment-e a vonat 1 $\frac{\text{km}}{\text{perc}}$ (60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) sebességnél gyorsabban, azt válaszolhatjuk, hogy *igen*. Mivel az utolsó szakaszon az átlagsebesség 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, és ebbe beleértendő az indulás és a fékezés szakasza is, közben tehát kellett, hogy a vonat 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél nagyobb pillanatnyi sebességgel menjen.

6. feladat [SzkiÖF, 1.13.]

A 2.2. táblázat a Nagybörzsönyből induló és Nagyirtás állomásig közlekedő erdei vasút menetrendjéből való.

2.1. táblázat. A vonat átlagsebessége az egyes szakaszokon

Távolság	Időtartam	Átlagsebesség
2 km	4 perc	30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
2 km	3 perc	40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
3 km	5 perc	36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
2 km	4 perc	30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
2 km	3 perc	40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
5 km	6 perc	50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
4 km	6 perc	40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
3 km	4 perc	45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
0 km	11 perc	0 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
10 km	10 perc	60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$



2.10. ábra. A vonat sebesség–idő grafikonja Fonyód és Keszthely között

2.2. táblázat. A 6. feladatban szereplő kisvonat menetrendje

km	hely	idő odafelé	idő visszafelé
0	Nagybörzsöny	9 h 50 p	17 h 20 p
4	Kisirtás	10 h 15 p	17 h 00 p
8	Nagyirtás	10 h 40 p	16 h 30 p

a) Ábrázoljuk a délelőtti járat elmozdulás–idő grafikonját, és adjuk meg az egyes szakaszokon a sebességét, ha feltesszük, hogy a vonat a megállók közt egyenletesen haladt.

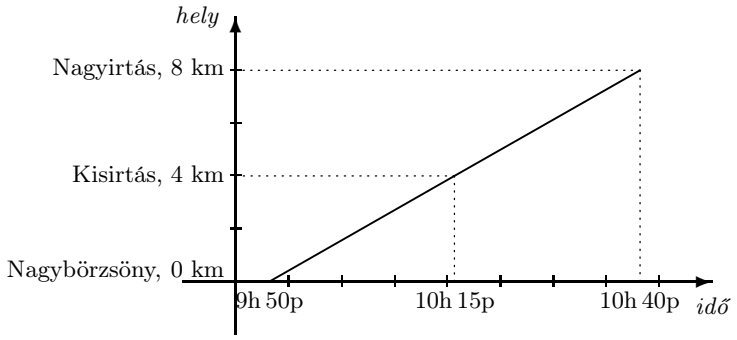
b) Ábrázoljuk a délutáni visszaút elmozdulás–idő grafikonját is, és itt is határozzuk meg a sebességeket! A visszaút esetén ne változtassuk meg az eddig használt viszonyítási pontot!

c) Ábrázoljuk a teljes nap történéseit az elmozdulás–idő grafikonon!

Megoldás:

A távolságmérés értelemszerűen választott viszonyítási pontja a kisvasút nagybörzsönyi végállomása. Az elmozdulástengely Nagyirtás felé mutat.

a) A táblázatból kiolvashatunk összetartozó hely–idő értékpárokat, ezek a grafikonon pontokként jelennek meg. Ezeket a pontokat egyenes szakaszokkal köthetjük össze, mivel feltételeztük, hogy az egyes szakaszokon a

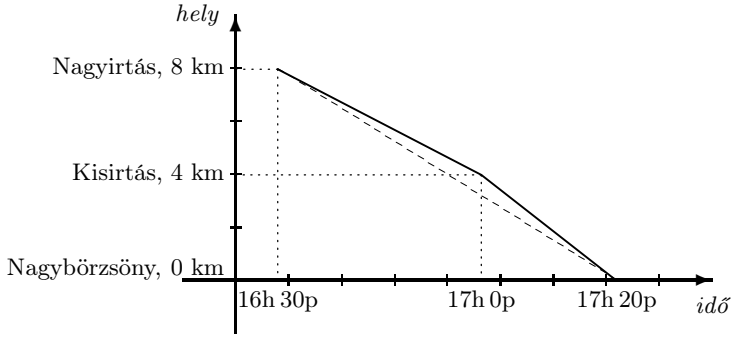


2.11. ábra. A kisvasút délelőtti útja

sebesség állandó. Így a délelőtti szakaszt az elmozdulás–idő grafikonon ábrázolva egy egyenes vonalat látunk (2.11. ábra).

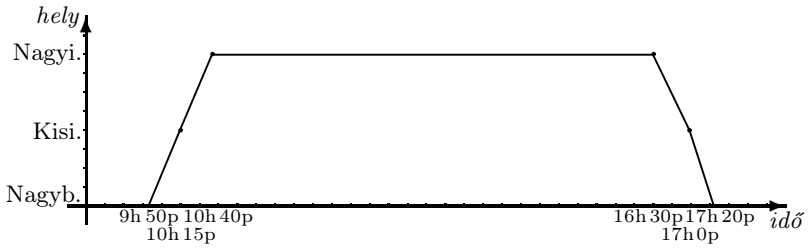
A vonat tehát az egész úton egyenletesen mozgott, sebessége az egyenes meredekségéből adódóan 9,6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) A visszaút ábrázolásakor ugyanazt a koordináta-rendszert használjuk, mint korábban. A vonat tehát a viszonyítási ponttól 8 km-ről indul, és ellenkező irányba megy, mint délelőtt. A mozgás grafikonja tehát lejt, a meredekség negatív, ami jelzi a sebességnek a korábbihoz viszonyított ellenkező irányát. A táblázat adatai szerint a vonat az út első felén lassabban halad, mint a másodikban. A teljes grafikon így két különböző meredekségű szakaszból áll. Az egyes szakaszokon a sebességek (nagysága, abszolút értéke): Nagyirtás–Kisirtás $\frac{4\,\text{km}}{30\,\text{perc}} = \frac{4\,\text{km}}{0{,}5\,\text{h}} = 8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; Kisirtás–Nagybörzsöny szintén 4 km 20 perc alatt, tehát $\frac{4\,\text{km}}{20\,\text{perc}} = \frac{4\,\text{km}}{0{,}33\,\text{h}} = 12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, s végül Nagyirtás és Nagybörzsöny között 50 perc alatt 8 km: az átlagsebesség 9,6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (ezt szaggatott vonal jelzi a 2.12. ábrán).



2.12. ábra. A kisvasút délutáni útja

c) A teljes időszakra elkészítve az elmozdulás–idő grafikont újdonságként jelenik meg a Nagyirtáson álló helyzetben töltött közel hat óra ábrázolása. Ha a test nem mozdul el egy időtartamban, akkor az elmozdulás–idő grafikonja vízszintes egyenes, sebessége zérus (2.13. ábra).



2.13. ábra. A kisvasút egy napja az út–idő grafikonon

7. feladat [FFF, 5.]

A 2.3. táblázat a nyúl, a kutya, a fácán és a csiga egyenes vonalú mozgásakor mért adatokat mutatja. Négy másodpercig minden másodperc végén rögzítették, hogy a megfigyelés kezdetétől hány méter utat tett meg az állat.

2.3. táblázat. A 7. feladat adatai

Időtartam	1 s	2 s	3 s	4 s
Nyúl	18 m	30 m	40 m	48 m
Kutya	30 m	60m	90 m	120 m
Fácán	16 m	30 m	50 m	64 m
Csiga	1 mm	2 mm	3 mm	0,004 m

a) Melyik állat mozgott egyenletesen?

b) Mekkora volt az egyenletesen mozgó állatok sebessége?

Megoldás:

A hely- és időmérés kezdetét a feladat kijelöli, így természetesen illeszthető egy-egy koordináta-rendszer mind a négy állat mozgásához: az origót az időmérés kezdete és az állat e pillanatban elfoglalt helye határozza meg, az elmozdulástengely irányát pedig az állat mozgása. Rajzoljuk fel az állatok mozgásának út–idő grafikonjára a megadott értékpárokat, majd húzzunk egy-egy egyenest, mely átmegy az origón és az első megadott ponton (2.14. ábra). Ha az állat egyenletesen mozgott, akkor az összes megadott pont rajta van ezen az egyenesen.

A rajzok alapján elmondhatjuk, hogy a nyúl nem mozgott egyenletesen: egyre kisebb távokat tett meg egy-egy másodperc alatt, tehát lassult. A kutya és a csiga láthatóan egyenletes sebességgel haladtak. A fácán esetében azt mondhatjuk, hogy mivel a mérési hibákat nem lehet kiküszöbölni teljesen, s az egyenes jól illeszkedik a mért pontokra, ez a mozgás is egyenletes. A sebességet a berajzolt szaggatott egyenes meredeksége mutatja meg: a kutya sebessége $\frac{120}{4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a fácáné $\frac{64}{4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a csigáé $\frac{0,004}{4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0,001\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

8. feladat [KözFiz, 13.]

A 2.15. ábra egy test mozgásának út–idő diagramját mutatja. Mekkora a test sebessége a mozgás egyes szakaszaiban?

Megoldás:

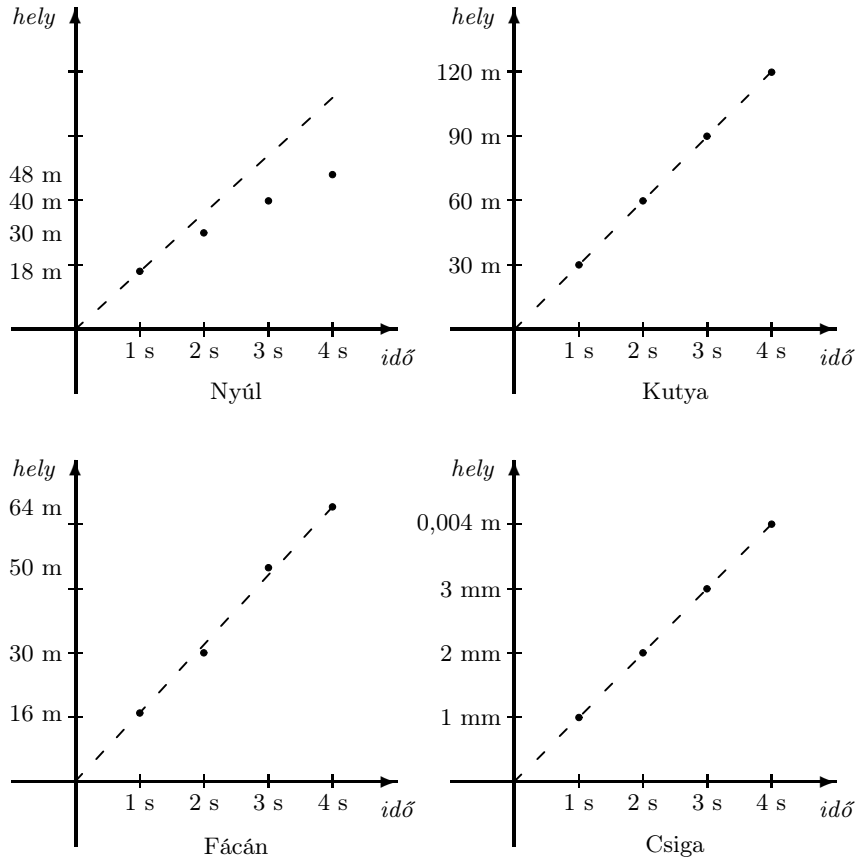
A grafikon egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszokból áll. Minden szakasz egyenes vonalú egyenletes mozgást jelez. A mozgás sebességét az egyes szakaszok meredeksége adja. A meredekségek meghatározásához a töréspontok koordinátáinak leolvasására van szükség, ebből határozzuk meg a mozgás során megtett útszakasz (Δs) és az ehhez szükséges idő (Δt) értékét. Így az első négy másodperc alatt a test 5 m utat tesz meg, sebessége tehát $1,25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A következő 2 másodpercben 10 m-t mozdul el, ekkor tehát a sebessége $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Majd 6 s alatt 15 m-t tesz meg *ellenkező irányba*, sebessége tehát $-2,5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Az átlagsebesség a megtett út és a közben eltelt idő hányadosa, így az első két szakaszon az átlagsebesség: az elmozdulás 15 m, az eltelt idő 6 s, tehát az átlagsebesség 2,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ezt a rajzon a szaggatott vonal meredeksége mutatja. A három szakaszon együttvéve 12 s alatt az elmozdulás 0, a megtett út pedig 30 m. Így az átlagsebesség itt is 2,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

9. feladat [FFF, 20.]

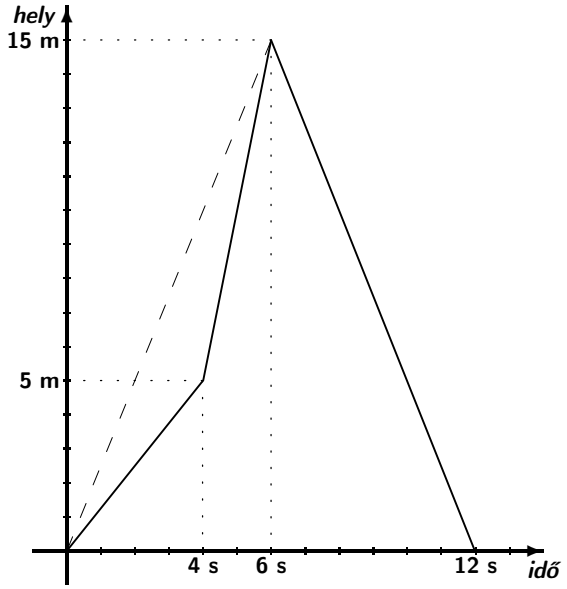
A 2.16. ábra egy test egyenes vonalú mozgásának út–idő grafikonját mutatja. Készítsd el a mozgás sebesség–idő grafikonját!

Megoldás:

A mozgás három jól elkülöníthető szakaszra oszlik. Az első 4 másodpercben a test állandó sebességgel mozgott pozitív irányba. Ezt követően a viszonyítási ponttól 20 m távolságban 4 másodpercig állt, majd 2 másodpercig visszafelé haladt egyenletesen.

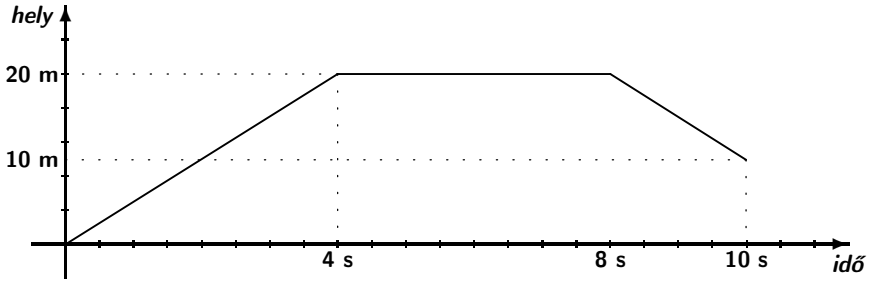


2.14. ábra. Az állatok mozgásának út–idő grafikonjai



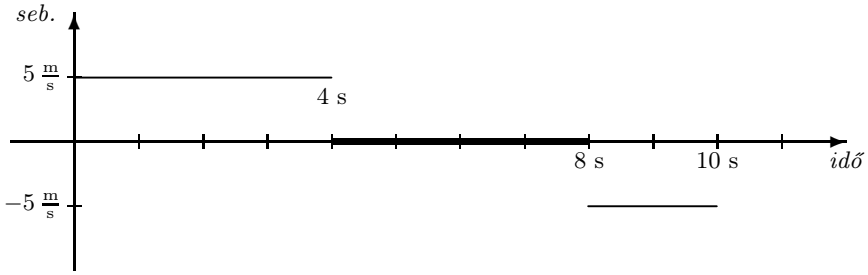
2.15. ábra. A 8. feladat grafikonja

Olvassuk le a mozgás három szakaszán, hogy mennyi idő alatt mekkora távolságot tett meg a test! Az első szakaszt, 20 m-t 4 s alatt tette meg a test, sebessége tehát 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A mozgás második szakaszában 2 s időtartam alatt az elmozdulás nulla, így itt a sebesség is nulla. A harmadik szakaszon szintén 2 s idő alatt



2.16. ábra. A 9. feladatban szereplő test út–idő grafikonja

10 m-t mozgott a test *ellenkező irányba*, sebessége tehát $-5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Mindezt koordináta-rendszerben ábrázolva a 2.17. ábrát rajzolhatjuk:



2.17. ábra. A 9. feladatban szereplő test sebesség–idő grafikonja

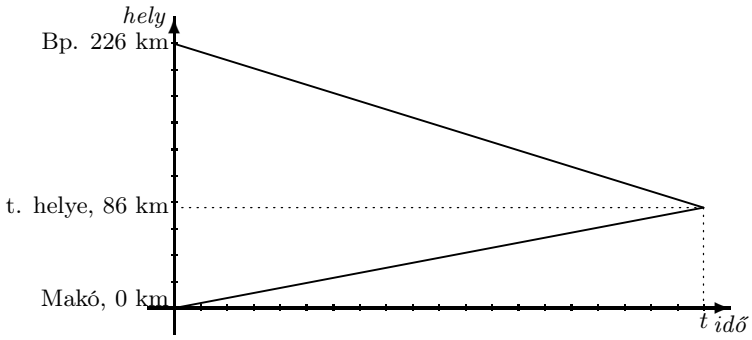
10. feladat ⋆ [FKF, 2.2/33.]

Budapest és Makó távolsága országúton 226 km. Mindkét városból egyidejűleg egy-egy autó indul egymás felé. A Budapestről induló autó átlagsebességének nagysága 70 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Makótól 86 km távolságra találkoznak.
Mekkora a másik autó átlagsebessége?

Megoldás:

Legyen a vonatkoztatási rendszer origója Makón, az induló autónál. A pozitív irány mutasson Budapest felé. Az időmérést a két autó indulásának pillanatában kezdjük. Legyen a találkozás időpontja t, s jelöljük a Makóról induló autó átlagsebességét v-vel!

Rajzoljuk fel az út–idő grafikont!



2.18. ábra. A két autó egymás felé halad

A 2.18. ábra alapján felírhatjuk, hol tartózkodnak az autók a t időpontban:

$$226\,\mathrm{km} - 70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t = 86\,\mathrm{km} \tag{2.1}$$

$$v \cdot t = 86\,\mathrm{km} \tag{2.2}$$

A (2.2) egyenletből $t = 2\,\mathrm{h}$, ezt (2.1) egyenletbe írva $v = 43\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

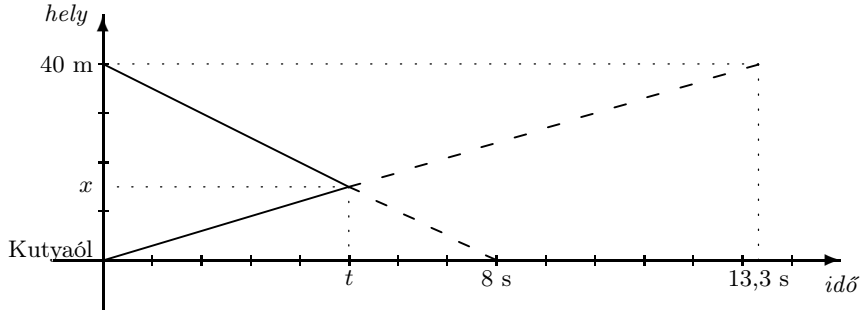
11. feladat ⋆

Két ismerős kutya 40 m távolságról megpillantva egymást egyszerre kezd futni egymás felé. A kisebbik sebessége 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a nagyobbiké 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Hol, és mennyi idő múlva találkozik a két kutya?

Megoldás:

Készítsük el a két kutya mozgásának út–idő grafikonját! A vonatkoztatási rendszer kiindulópontja legyen egy olyan tárgyhoz rögzítve, ami a kisebbik kutya kiindulási helyénél van; tegyük fel például, hogy a kutyaháztól kezd futni. A pozitív irány a nagyobbik kutya felé mutasson.

A nagyobbik kutya így negatív irányba fut, sebessége ezért negatív. Az időt akkor kezdjük mérni, amikor a két kutya elkezd futni. Az út–idő grafikon a 2.19. ábrán látható.



2.19. ábra. A két kutya egymás felé fut

Jelölje a találkozás helyét x, idejét t. A két kutya mozgását két ferde egyenes jelzi. Az egyenesek meredeksége a sebességet mutatja: a 40 m hosszú út befutásához az egyiknek 8 s, a másiknak 13,3 s időre van szüksége. Természetesen csak a találkozásig futnak a kutyák, de az egyeneseket hosszabban rajzoljuk, hogy a meredekségük pontos legyen. A találkozás helyét és idejét a két egyenes metszéspontjának koordinátái mutatják meg.

A kisebbik kutya t ideig fut 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$sebességgel, tehát az origóból indulva t idő múlva $x = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t$ távolságra kerül az origótól. A nagyobbik kutya az origótól 40 m távolságban indul, sebessége 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, tehát t idő múlva $40\,\mathrm{m} - 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t$ távolságra kerül az origótól. Mivel ez a találkozás helye, ez a két távolság egyenlő:

$$3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t = 40\,\mathrm{m} - 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t,$$

ahonnan $t = 5\,\mathrm{s}$, és $x = 15\,\mathrm{m}$.

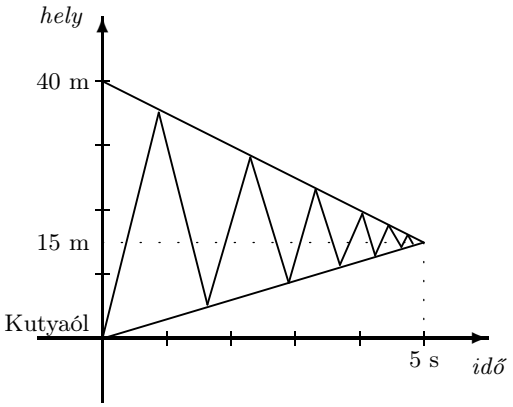
12. feladat ⋆⋆

A 11. feladatban szereplő két kutya orra között egy gyors légy száll ide-oda, ameddig a kutyák orra össze nem ér. Mennyi utat tesz meg a légy, ha sebessége 40 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

Megoldás:

Rajzoljuk rá a 2.19. ábrára a légy mozgását is! Az így kapott rajz a 2.20. ábrán látható.

A légy sebességének nagysága állandó, de a sebesség iránya váltakozik. Ezért a mozgás képe az út–idő diagramon egy váltakozva emelkedő és lejtő egyenes. A megtett út: ennek a tört vonalnak minden szakaszát



2.20. ábra. A légy mozgása a két kutya orra között

meg kell vizsgálni, hogy az elmozdulástengelyen mekkora távolságot repült a légy, s ezeket a távolságokat kell összeadni.

A 2.20. ábra segítségül szolgálhat annak felismerésében, hogy a légy ismert nagyságú sebességgel ismert ideig repül: a sebesség előjelének váltakozása csak az egyes szakaszokon repülő légy mozgásának irányával van összefüggésben. Minket azonban most csak a megtett utak abszolút értékének összege érdekel, vagyis az az út, amit a légy 5 s alatt 40 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel megtesz. Ez pedig $5\,\mathrm{s} \cdot 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 200\,\mathrm{m}$.

13. feladat [KözFiz, 19.]

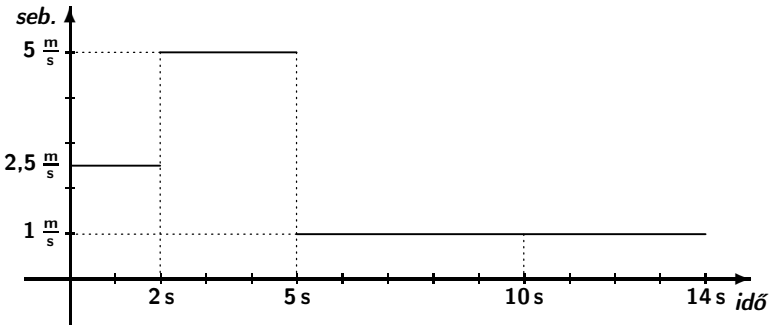
A 2.21. ábra egy test sebesség–idő diagramját mutatja.

a) Értelmezzük a grafikont! Hogyan mozgott a test az első tíz másodperc alatt?

b) Mekkora a megtett út 10 s alatt?

c) Rajzoljuk meg az út–idő diagramot!

d) Mekkora a mozgó test átlagsebessége az első tíz másodperc alatt?



2.21. ábra. A 13. feladathoz tartozó sebesség–idő diagram

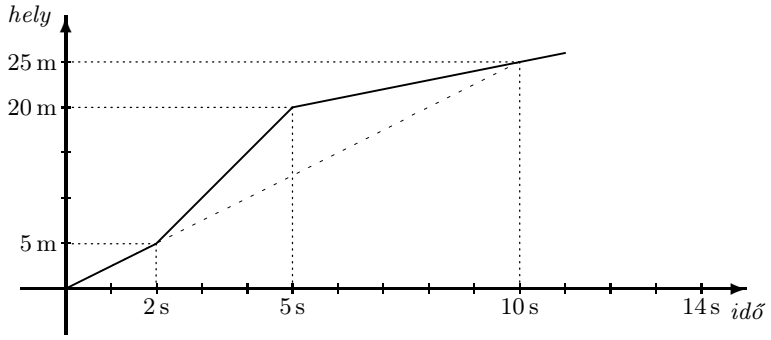
Megoldás:

Az ábrázolt mozgás három szakaszra bontható.

a) A test mindhárom szakaszon egyenes vonalú egyenletes mozgást végzett, mert a szakaszokon a sebesség nem változik. Két időpontban (a kezdettől számított 2 és 5 másodperckor) hirtelen, pillanatszerűen változik a sebesség.

b) A megtett út a grafikon alatti terület. Három téglalap területét kell tehát összeadnunk: $2\,\mathrm{s} \cdot 2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m}$, $3\,\mathrm{s} \cdot 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 15\,\mathrm{m}$ és $5\,\mathrm{s} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m}$, összesen 25 m.

c) Az út–idő diagramon a szakaszonként állandó sebességek miatt ferde szakaszok lesznek, pozitív meredekséggel. Az egyes szakaszok kezdő- és végpontjának koordinátáit a sebesség–idő grafikonéval azonos időadatok és a most kiszámított helyadatok adják (2.22. ábra).



2.22. ábra. A test elmozdulás–idő grafikonja

d) A 10 másodperc alatt megtett útra az átlagsebességet az út–idő grafikonra rajzolt szaggatott vonal meredeksége mutatja: 25 m-t tett meg a test 10 s alatt, átlagsebessége tehát 2,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

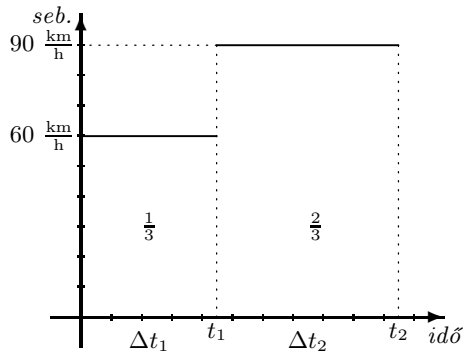
14. feladat [SzkiÖF, 1.12.]

Egy gépkocsi az útjának egyharmad részét 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel, kétharmadát pedig 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel teszi meg.
Mekkora az egész útra számított átlagsebesség?

Megoldás:

Az egész útra számított átlagsebességet az egész út és a teljes menetidő hányadosa adja meg. A feladat megoldása azért nehéz, mert egyik szükséges adat sincs közvetlenül megadva. Meghatározásuk külön okoskodást kíván. Mivel a példa adatai a két szakasz sebességére vonatkoznak, célszerű a mozgást sebesség–idő grafikonon ábrázolni. (Az átlag-diák számára ez sem egyszerű, mivel az ábrázoláshoz a részidő-adatok hiányában betűket kell használni – „mintha ismernénk az értékeket”!)

Jelöljük az első szakasz megtétele közben eltelt időt Δt_1-gyel, a második szakasz megtételéhez szükséges időt pedig Δt_2-vel. Rajzoljuk fel a sebesség–idő grafikont! Az út a grafikon alatti területtel egyenlő (2.23. ábra).



2.23. ábra. A gépkocsi sebesség–idő grafikonja

A teljes megtett út a két szakaszban megtett utak összege: $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\Delta t_1+90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\Delta t_2$. A teljes út megtételéhez szükséges idő $\Delta t_1+\Delta t_2$. A kiszámítandó átlagsebességet ($\bar{v}$) tehát így írhatjuk:

$$\bar{v}=\frac{60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\Delta t_1+90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\Delta t_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}.$$

A megtett utak arányából következően a 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel megtett út éppen fele a 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel megtett útnak, azaz a grafikonról leolvashatóan:

$$2 \cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \Delta t_1 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \Delta t_2.$$

Ebből

$$\Delta t_1 = \frac{3}{4}\,\Delta t_2.$$

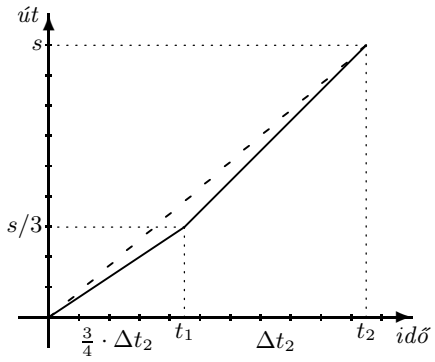
Az átlagsebesség összefüggésébe ezt beírva kapjuk:

$$\bar{v} = \frac{60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{3}{4}\,\Delta t_2 + 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \Delta t_2}{\frac{3}{4}\,\Delta t_2 + \Delta t_2}.$$

Ezt a törtet már egyszerűsíthetjük Δt_2-vel, s így kapjuk:

$$\bar{v} = \frac{540}{7}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 77,143\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Bár ezzel a feladatot megoldottuk, rajzoljuk még fel a történéseket az elmozdulás–idő grafikonra is! Ehhez rögzítsük a koordináta-rendszer kezdőpontját az első szakasz kezdőpontjához: az elmozdulástengely zéruspontja legyen a kiindulási pont, ahol az autó az indulás előtt tartózkodott. A teljes megtett utat jelöljük s-sel!



2.24. ábra. Az autó út–idő diagramja

A 2.24. ábrán látható grafikonon a megtört egyenes vonal első szakaszának meredeksége 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a második szakasz meredeksége 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Az átlagsebesség a megtört vonal két végpontját összekötő egyenes meredeksége, ezt kell leolvasnunk az ábráról.

A teljes s út két részből tevődik össze: $\frac{3}{4}\,\Delta t_2 \cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $\Delta t_2 \cdot 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ez

$$\frac{3}{4}\,\Delta t_2 \cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + \Delta t_2 \cdot 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Az egyenes meredekségének kiszámításához ezt osszuk el $\frac{3}{4}\,\Delta t_2 + \Delta t_2$-vel, és így a keresett átlagsebesség $\frac{540}{7}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 77,143\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

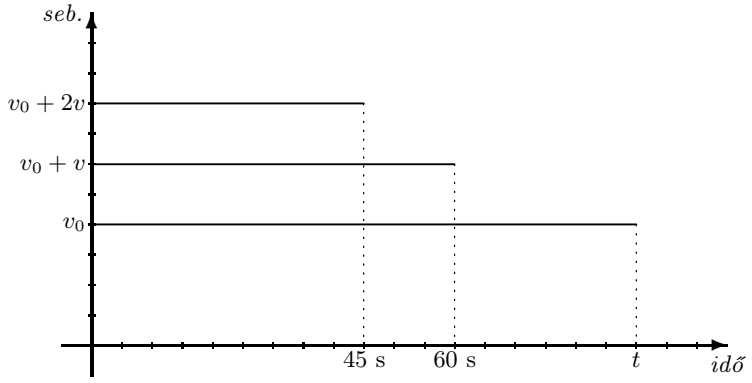
15. feladat ⋆ [SzkiÖF, 1.29.]

Ha csak minden második lépcsőfokra lép Jancsi, kétszer olyan gyorsan halad a lépcsőn, mintha „szabályosan", egyesével lépkedne.

Jancsi a metró lefelé haladó mozgólépcsőjén egyesével lépegetve megy le, és így 1 perc alatt ér le. Ha kettesével veszi a lépcsőfokokat, akkor 45 másodperc alatt ér le.
Mennyi idő alatt ér le, ha áll a lépcsőn?

Megoldás:

A viszonyítási rendszer kezdőpontja legyen a lépcső tetejénél álló jegykezelő automata. Jelöljük a mozgó-



2.25. ábra. Jancsi sebessége a mozgólépcsőn

lépcső sebességét v_0-lal, Jancsi sebességét az álló lépcsőkön v-vel, illetve $2v$-vel!

Ekkor első esetben a viszonyítási rendszerhez képest $v_0 + v$, a második esetben $v_0 + 2v$ sebességgel halad Jancsi. Ha csak áll a mozgólépcsőn, akkor természetesen a rendszerhez képest ő is v_0 sebességgel mozog. Jelöljük a keresett időértéket t-vel!

Ábrázoljuk a sebesség–idő grafikonon (2.25. ábra) a három esetet:

Mivel Jancsi mindhárom esetben ugyanakkora utat tett meg, a grafikonon látható három téglalap területe megegyezik.

$$\begin{aligned} 45\,\mathrm{s}\,(v_0 + 2v) &= 60\,\mathrm{s}\,(v_0 + v) \\ 45\,\mathrm{s}\,v_0 + 90\,\mathrm{s}\,v &= 60\,\mathrm{s}\,v_0 + 60\,\mathrm{s}\,v \\ 30\,\mathrm{s}\,v &= 15\,\mathrm{s}\,v_0 \\ 2v &= v_0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

illetve

$$\begin{aligned} 60\,\mathrm{s}\,(v_0 + v) &= t\,v_0 \\ 60\,\mathrm{s}\,v_0 + 60\,\mathrm{s}\,v &= t\,v_0 \end{aligned}$$

ahová a (2.3) egyenletet behelyettesítve

$$\begin{aligned} 60\,\mathrm{s}\,v_0 + 30\,\mathrm{s}\,v_0 &= t\,v_0 \\ 90\,\mathrm{s}\,v_0 &= t\,v_0 \\ t &= 90\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Jancsi tehát 90 másodperc alatt ér le a mozgólépcsővel a metróhoz, ha nem mozdul el a mozgólépcsőhöz viszonyítva.

16. feladat ⋆

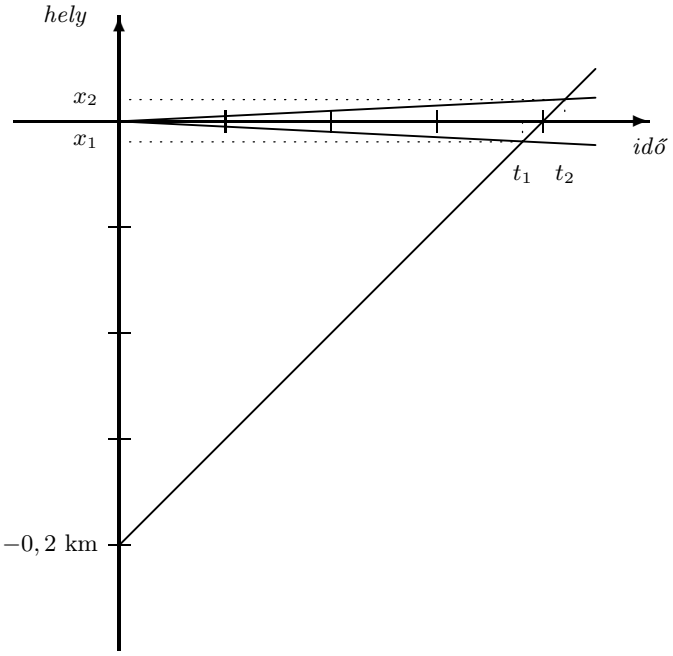
Egy tökéletes szélcsendben zajló Forma–1-es futamon a célegyenesben egy autó elromlik, ezért meg kell állnia. Megállás után a motor kigyullad. A füst az autóhoz képest 10 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nagyságú sebességgel terjed minden irányba.
A baleset pillanatában mögötte 200 m-rel 200 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel haladó versenyző mennyi ideig vezet a füstfelhőben?

Megoldás:

Készítsük el a történések út–idő grafikonját!

A történetet attól a pillanattól vizsgáljuk, amikor a megállt versenyautó kigyullad. A koordináta-rendszert tehát az égő autóhoz rögzítjük. Az autó füstje egyenletesen terjed minden irányba, két szélének mozgását az origóból induló, az időtengelyre szimmetrikus két egyenes ábrázolja. A füst elejének a környezethez viszonyított sebessége 10 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, végének sebessége -10 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

A közeledő versenyautó a történések kezdetén épp 200 m távolságra van a kigyulladt kocsitól és 200 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel egyenletes tempóban közeledik. Mozgását a 2.26. ábrán a meredek egyenes vonal jelzi. Az álló autó „mozgását” az időtengelyen lévő vízszintes egyenes ábrázolja. A füst szélét jelző és a közeledő autó mozgását mutató egyenes a t_1 időpontban metszi egymást: ekkor fut be az autó a füstfelhőbe, és a másik metszéspontról leolvasható t_2 időpontban hagyja azt el.



2.26. ábra. A két versenyautó és a füstfelhő

A versenyző t_1 és t_2 időpontok között tartózkodik a füstben. Az alatt az idő alatt, míg eléri a füstöt (t_1), annyival ment kevesebbet 200 m-nél, amennyit ezalatt a füst megtett: $10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_1$. Azalatt az idő alatt, amíg kilép a füstből (t_2), annyival megy többet 200 m-nél, amennyit ezalatt az idő alatt a füst megtesz. Így a két időpontra a következő egyenletek írhatók fel:

$$200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_1 + 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_1 = 0,2\,\mathrm{km},$$
$$200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_2 - 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_2 = 0,2\,\mathrm{km}.$$

Ebből $t_1 = 0,2/190$ h, illetve $t_2 = 0,2/210$ h. A két időpont közt eltelt idő $0,04/399$ h, azaz $0,36$ s.

A pilóta tehát $0,36$ s ideig kényszerült arra, hogy a füstben haladjon.

17. feladat ⋆ [FFF, 25.]

Egy gépkocsikból álló menetoszlop – elején és végén egy-egy motorossal – egyenletesen halad Budapesten, a városhatárhoz közel. A gépkocsioszlop mögött haladó motoros a városhatár végét jelző táblánál 90 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ egyenletes sebességgel elkezdi előzni a menetoszlopot. 5 perc alatt ér a menetoszlop elejére. Itt nagyon gyorsan jelzi a másik motorosnak, hogy a következő elágazásnál merre kell majd menni, majd megfordul és visszaindul szintén 90 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel. 2 perc alatt ér vissza a menetoszlop végére. Az üzenetátadással és a megfordulással töltött idő elhanyagolhatóan kicsi.
Milyen sebességgel halad, és milyen hosszú a menetoszlop?

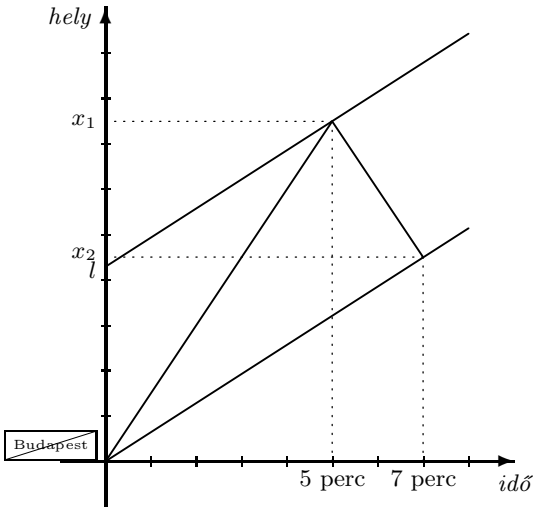
Megoldás:

Ábrázoljuk a történéseket út–idő diagramon! A koordinátarendszer origóját a városhatár-tábla, illetve az az időpont jelöli ki, mikor a motoros az előzésbe kezd.
A menetoszlop mozgását két párhuzamos egyenessel ábrázoljuk a 2.27. ábrán: az egyik a menetoszlop elejét, a másik a végét jelzi. Jelöljük a menetoszlop hosszát l-lel, azt a helyet, ahol a motoros eléri a menetoszlop elejét, x_1-gyel, ahol visszaér a végére, x_2-vel.

Számítsuk ki először x_1 és x_2 értékét! Tudjuk, hogy a motoros 5 percig halad 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, azaz 300 s ideig 25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel, ezért $25 \cdot 42\,\text{m} = 7500\,\text{m}$-t távolodik a táblától, $x_1 = 7500\,\text{m}$. Visszafelé 2 perc alatt 3000 m-t megy, tehát $x_2 = 7500\,\text{m} - 3000\,\text{m} = 4500\,\text{m}$.

Most már meg tudjuk határozni a menetoszlop végét jelző egyenes meredekségét: 7 s alatt 4500 m-t tett meg a menetoszlop, sebessége tehát $10,71\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 38,57\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Öt perc alatt a menetoszlop ezzel a sebességgel 3214 m-t haladt, a menetoszlop hossza tehát $l = 7500\,\text{m} - 3214\,\text{m} = 4286\,\text{m}$.



2.27. ábra. A menetoszlop

18. feladat ⋆⋆ [KözFiz, 35.]

Egy hosszú fatörzset ökör húz, a hajtó a fatörzs végénél ballag. Mivel az ökröt nem akarja megállítani, úgy szeretné megtudni a fatörzs hosszát, hogy „lelépi" a fatörzs hosszúságát menetirányban, s azt találja, hogy 18 lépés, valamint visszafelé, így 12 lépés. A lépések egyenlő hosszúak és a hajtó sebessége mindkét esetben ugyanakkora nagyságú.
Milyen hosszú a fatörzs? Mekkora az ökör és a hajtó sebessége?

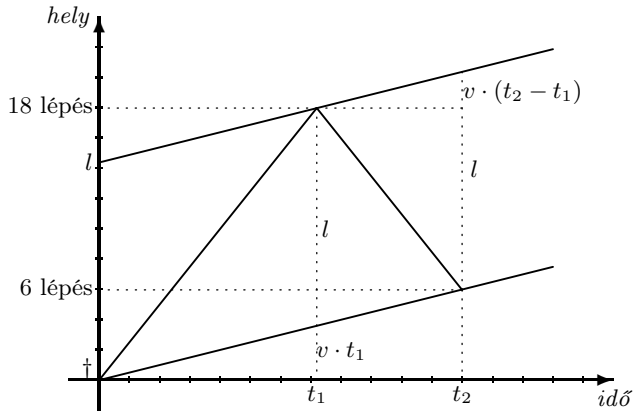
Megoldás:

Rajzoljuk fel a történetet az út–idő grafikonra! Mivel a történetben fontos szerepet kap a lassan mozgó hosszú gerenda és a gyorsabban lépkedő hajtó, a grafikonon mindkettő mozgásának szerepelnie kell. A gerenda mozgását nem tudjuk egyetlen egyenessel ábrázolni, hiszen a gerenda hossza fontos távolság a feladatban. A gerenda mozgását úgy ábrázolhatjuk, hogy elejének és végének a mozgását is megrajzoljuk. A grafikon megszerkesztésének első lépéseként rögzítjük a koordináta-rendszert. Az időt attól a pillanattól mérjük, amikor a hajtó a gerenda végétől elindul előre. Ekkor épp egy útszéli kereszt mellett haladt el: ez lesz (†) a távolságmérés kiindulópontja. Az így felvett koordináta-rendszerben a gerendát a kezdeti pillanatban egy, az elmozdulástengelyen lévő szakasz mutatja. A gyalogos két irányú mozgását a 2.28. ábrán két, azonos abszolút értékű, de ellenkező előjelű meredekséggel felrajzolt egyenessel ábrázoljuk.

Legyen a fatörzs hossza l, sebessége v! Jelölje a megfordulás időpontját t_1, azt az időpontot, amikor a hajtó visszaér a gerenda végéhez, t_2. Így az egyirányú mozgás időtartama $t_1 - 0 = t_1$, az ellenkező irányúé $t_2 - t_1$.

Amikor a hajtó előre lépkedve 18 lépésnek méri a gerendát, a gerenda valódi hosszánál többet mér. A grafikonról leolvasható, hogy ez a többlet épp az a távolság, amit a gerenda ez idő alatt megtesz, azaz

$$18\,\text{lépés} = l + v \cdot t_1.$$



2.28. ábra. A gerenda hosszának mérése lépésekkel

Visszafelé a mért 12 lépés éppen akkora távolsággal kevesebb a gerenda hosszánál, mint amekkora távolságot a gerenda megtett a mérés közben:

$$12\,\text{lépés} = l - v \cdot (t_2 - t_1).$$

A két egyenlet alapján a kérdezett l hossz kiszámítása lehetetlennek tűnik, hiszen az l mellett v, t_1 és t_2 szintén ismeretlen.

A megoldást az teszi mégis lehetségessé, hogy t_1 és t_2 időpontokhoz megfelelő időegység választásával számértékeket rendelhetünk.

A diákok számára magától értetődő, hogy a gerenda hosszát lépéshossz-egységekben számoljuk ki. Arra azonban kevesen gondolnak, hogy az ütemes lépés az idő egységét is jelentheti. Ha időegységül a lépésidőt választjuk, $t_1 = 18\,\text{lépésidő}$, $t_2 - t_1 = 12\,\text{lépésidő}$. Így a feladat már megoldható.

A mértékegységek szabad választásának megerősítésére érdemes felhívni a figyelmet, hogy a fenti egységválasztás esetén a hajtó sebessége $1\ \frac{\text{lépés}}{\text{lépésidő}}$. A gerenda sebességét ugyancsak $\frac{\text{lépés}}{\text{lépésidő}}$ egységekben kaphatjuk meg.

$$18\,\text{lépés} - v \cdot 18\,\text{lépésidő} = l$$
$$12\,\text{lépés} + v \cdot 12\,\text{lépésidő} = l.$$

Az így kapott egyenletrendszerben már csak két ismeretlen van. Így az ökör (és a fatörzs) sebessége: $v = \frac{1}{5}\frac{\text{lépés}}{\text{lépésidő}}$, a fatörzs hossza: $l = 14,4\,\text{lépés}$.

19. feladat ⋆⋆⋆ [KözFiz, 37.]

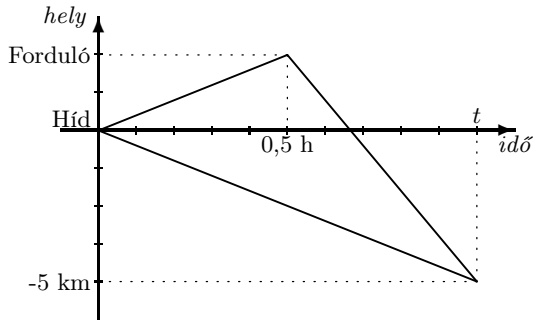
Egy halász felfelé evez a folyón. A híd alatt áthaladva a vízbe esik a csáklyája, de ezt csak fél óra múlva veszi észre. Ekkor visszafordul, és a hídtól 5 km-rel lejjebb éri utol a csáklyát. A halász a folyón felfelé és lefelé haladva egyformán evez.
Mennyi ideig sodorta a víz a csáklyát?

Megoldás:

Rögzítsük a vonatkoztatási rendszer origóját a hídhoz! A pozitív irány legyen a halász haladási iránya a történet (és az idő mérésének) kezdetén, azaz amikor a csáklya kiesik a csónakból. Így a folyó sebessége negatív.

A halász egyformán evez mindkét irányba, azaz a csáklyához (és így a folyóhoz) képest sebességének nagysága (abszolút értéke) ugyanakkora, csak kezdetben pozitív, a megfordulás után negatív. Ezért, ha a folyó sebessége a hídhoz képest v, és a csónak sebessége a folyóhoz képest kezdetben u, akkor a hídhoz viszonyítva a csónak sebessége kezdetben $u - v$, majd a megfordulás után $-(u + v)$.

Rajzoljuk meg az út–idő diagramot! A 2.29. ábrán a csónak mozgását az első fél órában a pozitív $(u - v)$ meredekségű egyenes, majd a találkozásig a negatív $(-(u + v))$ meredekségű egyenes mutatja. A csáklya grafikonja egy $-v$ meredekségű egyenes. A találkozásig eltelt időt jelölje t!



2.29. ábra. A halász és a csáklya út–idő diagramja

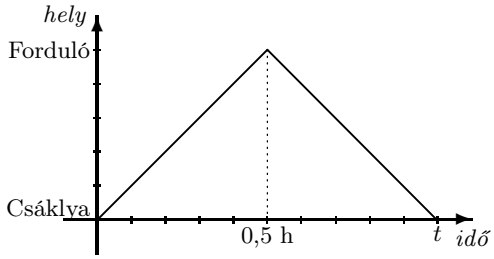
A fordulóig 5 km-rel kevesebbet tett meg a halász, mint a fordulótól a találkozásig. A fordulóig megtett út $0,5\,\mathrm{h}\cdot(u-v)$, a forduló után megtett távolság pedig $(t-0,5\,\mathrm{h})\cdot(u+v)$. Így tehát az előző állítás a következő egyenlet formájában fogalmazható meg:

$$0,5\,\mathrm{h}\cdot(u-v)+5\,\mathrm{km}=(t-0,5\,\mathrm{h})\cdot(u+v). \tag{2.4}$$

Tudjuk még, hogy a hídtól -5 km távolságra a csáklya v sebességgel t idő alatt jutott el, ahonnan $t=-\frac{5\,\mathrm{km}}{v}$. Ezt behelyettesítve a (2.4) egyenletbe, még mindig két ismeretlenünk marad, s nem látszik rögtön, hogy u kiesik az egyenletből. Ezt a nehézséget leküzdve azt kapjuk, hogy a folyó sebessége $v=-5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, a csáklya pedig $t=1\,\mathrm{h}$ ideig volt a vízben.

Megjegyzés. A legjobb tanulóknak megmutatható, hogy a viszonyítási rendszer szokásostól eltérő, ügyes megválasztásával a feladat megoldása lényegesen könnyebbé válhat.

Rögzítsük most a viszonyítási rendszert a folyón úszó csáklyához! Ekkor a folyó a rendszerben nem mozog, a csónak sebessége pedig a két irányba azonos abszolút értékű. Így az út–idő grafikon a 2.30. ábrán látható lesz.



2.30. ábra. A halász mozgása a csáklyához rögzített rendszerben

Mivel a grafikon szimmetrikus, azonnal látható, hogy $t=2\cdot 0,5\,\mathrm{h}=1\,\mathrm{h}$.

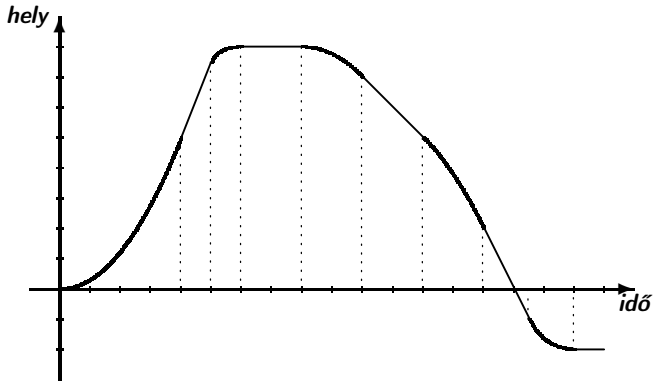
2.2. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

20. feladat

A 2.31. ábra egy kerékpáros mozgását ábrázolja. Elemezd az ábrát, és rajzolj a mozgásról sebesség–idő diagramot!

Megoldás:

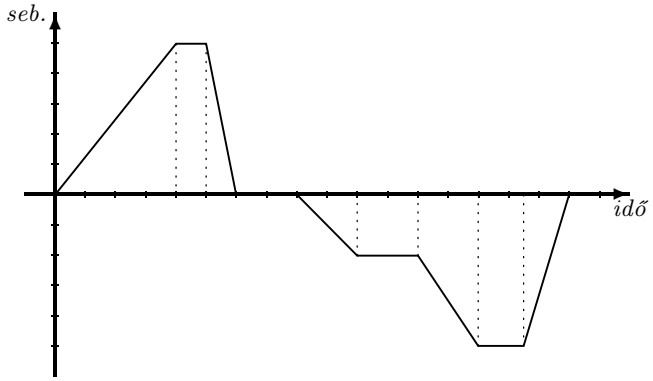
Az út–idő grafikonról megállapítható, hogy a kerékpáros az origóból (talán otthonról) indult, gyorsuló mozgással a pozitív irányba. Rövid ideig egyenletes sebességgel haladt, majd hirtelen lefékezett. Egy ideig



2.31. ábra. A 20. feladat grafikonja

állt (lehet, hogy vásárolt a boltban), majd gyorsított visszafelé. Kényelmesebben nyomta a pedált, mint az odaúton, de később tovább gyorsított. Túlhaladt az origón, majd lefékezett és megállt (elképzelhető, hogy a vásárolt élelmiszert a nagymamájához vitte).

A sebesség–idő grafikon első szakasza tehát egy ferde egyenes, majd egy rövid vízszintes szakasz. Ezt követően a sebesség rövid idő alatt nullára csökken: a grafikon ferde, és meredeken lejt. A következő szakasz az időtengely alatti, kevésbé meredek ferde egyenes, ezt egy vízszintes szakasz követi. A további gyorsulás képe egy lankásan ferde szakasz. Újabb vízszintes után a fékezést meredek, az időtengelyig emelkedő ferde egyenes jelzi. A kész rajz a 2.32. ábrán látható.



2.32. ábra. A kerékpáros sebesség–idő diagramja

21. feladat [FKF, 2.3/21.]

„Reccs!! – Segítség! – suttogta Micimackó, de csak halkan és finoman, hogy ne zavarjon vele senkit, a mézet. Egyébként pedig: Segítség!”[1]
miközben a két méterrel alatta terpeszkedő ág felé zuhant.

– Tulajdonképpen... – mondta a három méternél lejjebb nyúló faágra pottyanva

– Véleményem szerint... – magyarázta tovább két bukfenc között, miközben öt méterrel alább került – csak azt akartam mondani...

– Természetesen ebben az esetben... – folytatta udvariasan, miközben rekordsebességgel zuhant keresztül a következő hat darab faág között.

– Feltevésem szerint mindez csak azt jelenti... – határozott végre, elbúcsúzva az utolsó faágtól, hogy további három bukfenc árán végre kecsesen elhelyezkedjék egy rekettyebokorban –, azt jelenti, hogy bizonyos szempontból nagyon szeretem

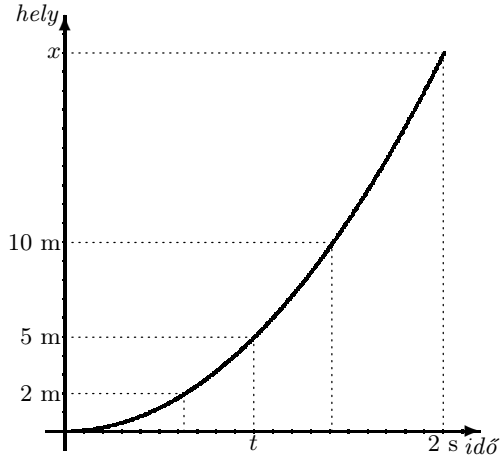
[1] Részlet *A. A. Milne: Micimackó* című művéből. Móra Könyvkiadó, Budapest, 1969; Karinthy Frigyes fordítása.

A történet „prózaibb” megfogalmazása a következő: Micimackó alatt letörött az ág, így szabadon esett $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással.
Mekkora volt a valódi rekordsebessége, amikor elérte a rekettyebokrot?
Milyen magasról esett le, ha két másodpercig esett?
Mennyi ideje esett, mialatt a „három méternél lejjebb nyúló ágra pottyant” és másodszor is megszólalt?

Megoldás:

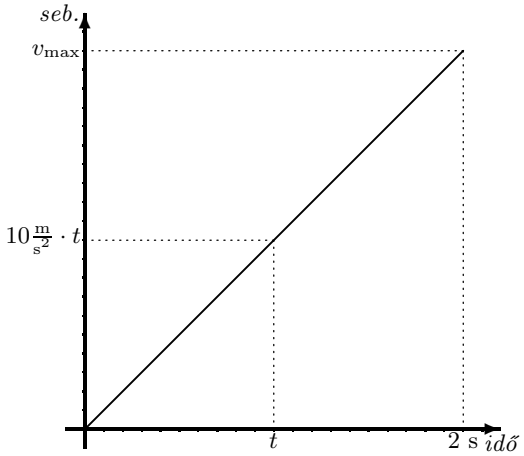
Rögzítsük a koordináta-rendszer origóját a mézhez! A pozitív irány mutasson a rekettyebokor felé! Ebben az esetben Micimackó gyorsulása pozitív.

Rajzoljuk fel Micimackó esésének út–idő grafikonját! Mivel a pozitív irány most lefelé mutat, a grafikon egy „álló” parabola. A 2.33. ábrán a keresett magasságot x-szel, a keresett időpontot t-vel jelöltük.



2.33. ábra. Micimackó esésének út–idő diagramja

Rajzoljuk fel a sebesség–idő diagramot is! Micimackó pozitív irányba gyorsul 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással, ezért sebesség–idő grafikonja origóból induló, pozitív meredekségű egyenes.



2.34. ábra. Micimackó esésének sebesség–idő diagramja

Micimackó $v_{\max}$ sebességét könnyen leolvashatjuk a 2.34. ábráról: $v_{\max} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,\mathrm{s} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
A fa magasságát a sebesség–idő grafikon alatti terület segítségével számíthatjuk ki:

$$x = \frac{2\,\mathrm{s} \cdot v_{\max}}{2} = \frac{2\,\mathrm{s} \cdot 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} = 20\,\mathrm{m}.$$

A t időpont meghatározásához használjuk fel, hogy a sebesség-grafikon alatti terület t-ig terjedő része az

eddig megtett út: 5 m. Ezt egyenlet formájában így írhatjuk:

$$\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t\cdot t}{2} = 5\,m$$
$$t\cdot t = 1\,\mathrm{s}^2$$
$$t = 1\,\mathrm{s}.$$

Ezzel a feladat összes kérdésére választ adtunk.

22. feladat [FFF, 43.]

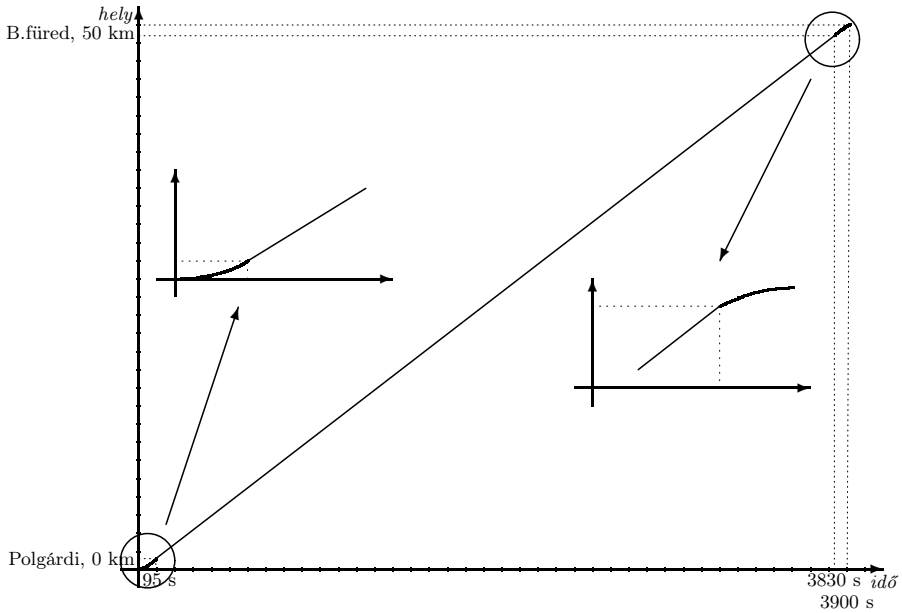
Polgárdi és Balatonfüred között 50 km a távolság. A vonat 65 perc alatt teszi meg ezt az utat. Induláskor 95 s-ig gyorsít, és érkezés előtt 70 s-mal kezdi meg a fékezést. A gyorsítás és a fékezés is egyenletesen történik. Az út többi részét egyenletes mozgással teszi meg.

a) Mekkora a vonat sebessége, amikor egyenletesen mozog?

b) Mekkora a vonat gyorsulása induláskor és fékezéskor?

Megoldás:

Rajzoljuk meg az út–idő grafikont. A koordináta-rendszer origója Polgárdiban az indulás időpontja. Az elmozdulástengely Balatonfüred felé mutat. A teljes mozgás 3900 s ideig tart, a fékezést tehát 3830 s-mal az indulás után kezdi meg a vonat.



2.35. ábra. A vonat mozgása az út–idő diagramon

A 2.35. ábrán a nem egyenletes szakaszokat ábrázoló parabolaíveket és a hozzájuk törés nélkül csatlakozó egyeneseket kinagyítottuk.

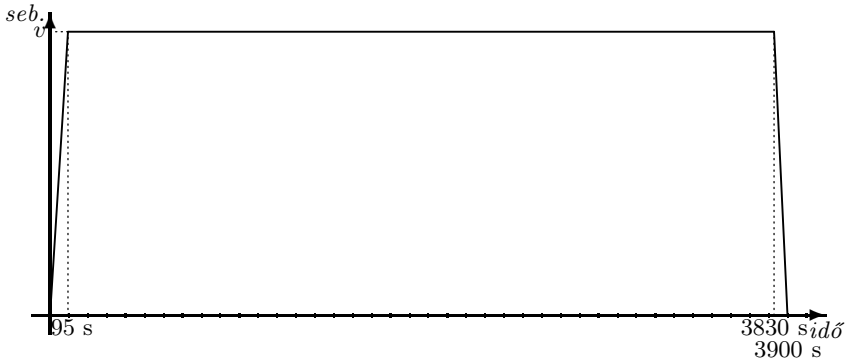
A két parabolaív miatt pontos értékek az ábráról nem határozhatók meg, ezért rajzoljuk fel a sebesség–idő grafikont is! Jelöljük a már egyenletesen mozgó vonat sebességét v-vel (2.36. ábra).

a) A megtett utat a rajzon a grafikon alatti terület mutatja: két háromszög és egy téglalap területének összege.

$$50\,000\,\mathrm{m} = \frac{95\,\mathrm{s}\cdot v}{2} + 3735\,\mathrm{s}\cdot v + \frac{70\,\mathrm{s}\cdot v}{2},$$

Ebből egyszerű számítással:

$$v = 13,01\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 47,15\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$



2.36. ábra. A vonat sebességének változása

b) A gyorsulásokat a sebesség–idő grafikon ferde szakaszai meredekségeinek kiszámításával tudhatjuk meg. A gyorsításkor 95 s alatt 13,01 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességváltozás következik be, a gyorsulás tehát 0,137 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Fékezéskor 70 s alatt $-13,01\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a sebességváltozás, a gyorsulás tehát $-0,186\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

23. feladat $\boxed{\mathrm{K}}$

Vizsgáljuk meg az osztály legjobban futó diákjának mozgását, miközben adott jelre maximális „erőbedobással" lefut 50 m-t!

Megoldás:

A feladat elvégzése idő- és távolságmérést kíván.

A kísérletet csoportos tanulói méréssel végezzük el! Jelöljük ki a pályát, és húzzuk meg a startvonalat. A startvonaltól számított első 20 méteren 2 méterenként, majd 5 méterenként húzzunk vonalat az aszfaltra. Minden vonal mellé álljon egy-egy diák stopperrel a kezében!

A startjelre a futó elindul, s ugyanekkor minden időmérő diák egyszerre elindítja a stopperét. Az órát mindenki akkor állítja meg, mikor a futó éppen az előtte lévő vonalon halad át.

A mozgás adatait rögzítő értéktáblázatba minden diák beírja a saját helyét (a rajtvonaltól mért távolságát), és a stopperéről leolvasott időt. Az értéktáblázat alapján elkészítjük a mozgás út–idő grafikonját.

Határozzuk meg a futó kezdeti gyorsulását és vizsgáljuk meg, mekkora a sebessége a táv második szakaszán!

5-10 lépés után a futó már nem gyorsul, mozgása közel egyenletes (hosszabb táv esetén lassul). A mozgás sebességét az út–idő grafikon egyenes szakaszának meredeksége adja.

A kapott értékeket érdemes összehasonlítani az országos és világrekordokkal.

A futó gyorsulásának meghatározása összetettebb feladat.

A gyorsulási szakaszt a sebesség–idő grafikon segítségével vizsgáljuk. Mivel a mozgás álló helyzetből indult, az egyenletesen gyorsuló mozgás grafikonja az origóból kiinduló egyenes. Az egyenes megrajzolásához számítsuk ki a futó átlagsebességét az egyes mérési pontok között: a mérési pontok távolságát osszuk el a mérési pontokon álló megfigyelők által mért időkülönbséggel. Ha a futó a két pont közti távolságot egyenletes mozgással tette volna meg, ezzel a sebességgel kellett volna haladnia. Rendeljük ezt a sebességet a két mérési pontban mért idők számtani közepéhez! Az így kapott adatpárok segítségével rajzoljuk meg a sebesség–idő grafikont. Ha jól végezzük a mérést, és a futó is ügyes, akkor a kapott ábra (vagy legalább az eleje) közel egyenes. Ennek az egyenesnek a meredeksége mutatja a futó gyorsulását.

A dinamika tanítása során érdemes visszatérni a feladatra (38. feladat).

24. feladat $\boxed{\mathrm{K}}$

Vizsgáljuk meg, ki tud az osztályból érzékeire hagyatkozva a legegyenletesebben kerékpározni 20 m távolságon!

Megoldás:

A versenyt csoportos tanulói méréssel dönthetjük el. A 23. feladatban elmondott módon mérjük az egyenletesen megjelölt útszakaszok megtételéhez szükséges időt. A mérési eredményeket grafikusan ábrázolva eldönthető a verseny győztese: akinél a grafikon mérési pontjai legkevésbé térnek el az origón átmenő egyenestől.

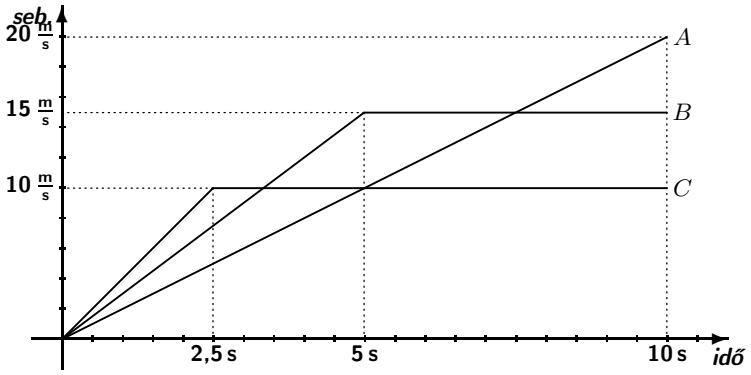
25. feladat [KözFiz, 50.]

A 2.37. ábra három test sebességének nagyságát mutatja az idő függvényében.

a) Melyik test teszi meg a legnagyobb utat a 0 ... 10 s időszakban?

b) Mekkora az egyes testek átlagsebessége a 0 ... 10 s időszakban?

c) Melyik testnek volt a legnagyobb a gyorsulása?



2.37. ábra. A 25. feladatban szereplő testek sebessége az idő függvényében

Megoldás:

Látható, hogy az A test végig egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A B és C testek egy ideig szintén egyenletesen gyorsuló mozgással mozognak, majd elérve egy bizonyos sebességet, egyenes vonalú egyenletes mozgással folytatják útjukat.

a) A sebesség–idő grafikonról a megtett út nagyságát a grafikon alatti terület leolvasásával tudhatjuk meg. Az A test esetében egy háromszög területét kell kiszámolnunk: a megtett út $\frac{10\ \mathrm{s}\cdot 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} = 100$ m. A B és C testeknél egy háromszög és egy téglalap területének összege adja a megtett utat. Így a B testnél ez $\frac{5\ \mathrm{s}\cdot 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} + 5\ \mathrm{s}\cdot 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 112,5$ m. A C testnél pedig $\frac{2,5\ \mathrm{s}\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} + 7,5\ \mathrm{s}\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 87,5$ m. A leghosszabb utat tehát a B test tette meg, 112,5 m-t.

b) Az átlagsebesség azt jelenti, hogy ezzel a sebességgel egyenletesen haladva ugyanannyi idő alatt ugyanakkora utat tett volna meg a test. Tehát egy olyan vízszintes egyenes ábrázolhatja a grafikonon az átlagsebességet, amely alatti terület megegyezik az eredeti grafikon alatti területtel. Ezt a területet, a megtett utat az előző pontban kiszámítottuk, így ezt az értéket kell osztani a mozgás közben eltelt idővel, 10 s-mal. Az egyes testek átlagsebessége tehát: A: 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, B: 11,25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, C: 8,75 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

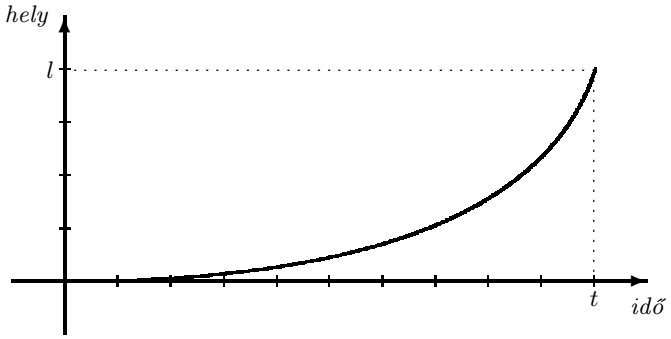
c) A gyorsulást a grafikon ferde szakaszainak meredeksége adja meg. Ebből rögtön látható, hogy a C testnek volt a legnagyobb a gyorsulása, hiszen a hozzá tartozó grafikon a legmeredekebb. Numerikusan kiszámítva az A test gyorsulása a teljes 10 s alatt: $\frac{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\ \mathrm{s}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. A B test gyorsulása 0 s és 5 s között: $\frac{15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5\ \mathrm{s}} = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. A C test gyorsulása 0 s és 2,5 s között: $\frac{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2,5\ \mathrm{s}} = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

26. feladat [FFF, 40.]

Milyen hosszú kifutópálya szükséges ahhoz, hogy a repülőgép a földön egyenletes, 2,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ nagyságú gyorsulással elérje a felszálláshoz szükséges 200 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességet?

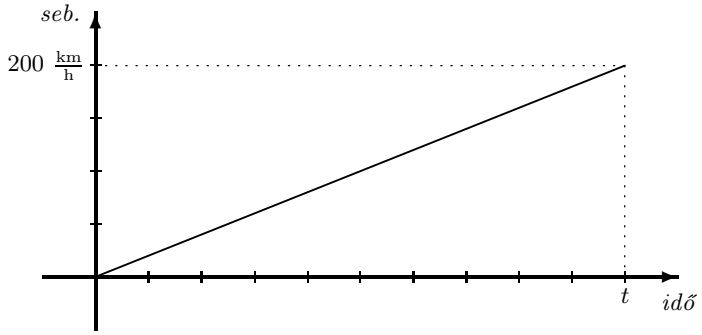
Megoldás:

Rajzoljuk meg a mozgás út–idő grafikonját! A koordináta-rendszert a kifutópálya jelöli ki: legyen az origó a pályának az a vége, ahonnan a gép elindul, és az az időpont, amikor elindul, az elmozdulástengely iránya pedig egyezzék meg a kifutópálya irányával. Az ábrán a pálya hosszát l, a felszállás pillanatát t jelzi.



2.38. ábra. A felszálló repülőgép helye az idő függvényében

Látható, hogy a másodfokú függvény miatt a 2.38. ábráról l és t értékét nem tudjuk pontosan meghatározni. Hogy tovább léphessünk, rajzoljuk meg a sebesség–idő grafikont! Az egyenletes gyorsulás miatt ezen a grafikonon (2.39. ábra) egy egyenes ábrázolja a repülőgép gyorsítását.



2.39. ábra. A repülőgép sebességének változása a kifutópályán

Tudjuk, hogy az egyenes meredeksége 2,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, ezért t értékét könnyen meghatározhatjuk:

$$t = \frac{200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{55,56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 22,22\,\mathrm{s}.$$

A repülő által a földön megtett utat, azaz a kifutópálya hosszát a sebesség–idő grafikon alatti terület kiszámításával mondhatjuk meg:

$$l = \frac{200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t}{2} = \frac{55,56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 22,22\,\mathrm{s}}{2} \approx 617,3\,\mathrm{m}$$

27. feladat ⋆ [FKF, 2.3/18]

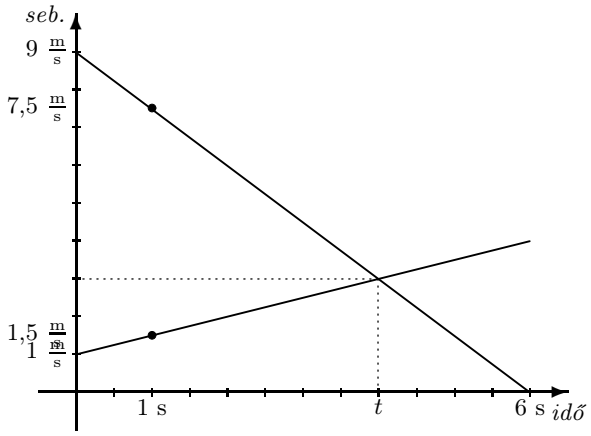
Rajzold meg ugyanabban a koordináta-rendszerben két egyenletesen változó mozgást végző test sebesség–idő grafikonját! A két test egyszerre indul. Az első test kezdősebessége 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gyorsulása

0,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; a második kezdősebessége 9 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gyorsulása –1,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Határozd meg, mennyi idő múlva lesz a két test sebessége egyenlő! Számítsd ki a két test által ezalatt az idő alatt megtett utat!

Megoldás:

Az egyenletesen gyorsuló mozgást végző test sebesség–idő grafikonja egyenes, a kezdősebesség megmutatja ennek az egyenesnek és a sebességtengelynek a metszéspontját, a gyorsulás pedig az egyenes meredekségét. Most mindkét test kezdősebessége pozitív, azaz a sebességtengelyt mindkét egyenes az időtengely fölött metszi. Az egyik test gyorsulása pozitív, ami azt jelenti, hogy sebessége nő: az egyenes „emelkedik". A másiké negatív, ami pozitív kezdősebesség esetén azt jelenti, hogy a sebesség csökken, a test lassul, az egyenes „lejt".

Először berajzoljuk a sebességtengelyre a metszéspontokat. 1 s alatt az első test sebessége 0,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-mal változik: ezt felhasználva a grafikon még egy pontját megrajzoljuk, majd a két pontot összekötjük. Hasonlóan a második test sebessége 1 s alatt 1,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-mal csökken. A kész diagramot a 2.40. ábrán látjuk.



2.40. ábra. A két gyorsuló test sebesség–idő grafikonja

Az az időpont, mikor a két test sebessége megegyezik, t. Ez alatt az idő alatt az első test sebessége 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességről másodpercenként 0,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-mal nő, azaz a sebessége t időpontban $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t$. A másik test sebessége hasonlóképpen $9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t$. Ez a két sebesség egyenlő, amiből $t = 4\,\mathrm{s}$. Ekkor a testek sebessége $3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A megtett utat a grafikon alatti terület kiszámításával kaphatjuk meg. Ez esetünkben két trapéz területének kiszámítását jelenti. Az első test által megtett út: $s_1 = \frac{(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\cdot 4\,\mathrm{s}}{2} = 8\,\mathrm{m}$, a második test által megtett út pedig $s_2 = \frac{(9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\cdot 4\,\mathrm{s}}{2} = 24\,\mathrm{m}$.

28. feladat [FFF, 39.]

A 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással induló gépkocsi, miután elérte a 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességet, egyenletesen halad tovább. Mekkora utat tesz meg az indulástól számított 30 s alatt?

Megoldás:

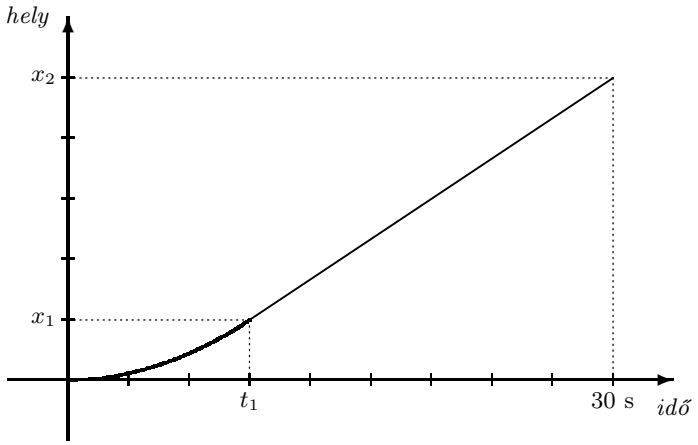
A koordináta-rendszer origóját helyezzük az indulás helyéhez és pillanatához. Az elmozdulás-tengely mutasson a mozgás irányába.

Jelöljük a gyorsítás idejét t_1-gyel. Ezalatt az idő alatt az autó x_1 távolságot tett meg, míg az indulás után 30 s múlva x_2 távolságra jutott az indulás helyétől.

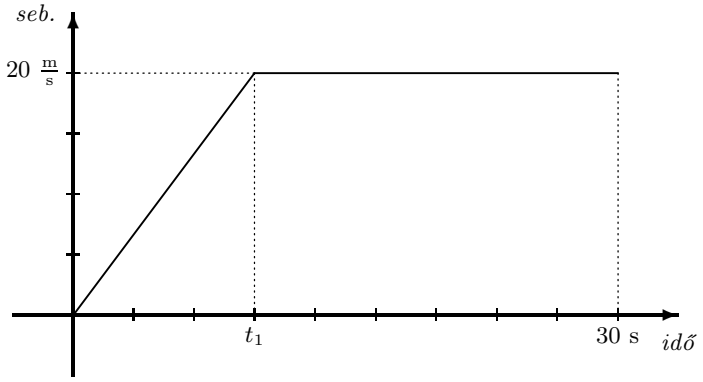
A sebesség–idő grafikont is rajzoljuk meg!

Mivel a 2.42. ábrán a grafikon ferde szakaszának meredeksége 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, t_1 értékét ki tudjuk számítani: $t_1 = \frac{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 10\,\mathrm{s}$.

A megtett út a grafikon alatti területtel egyenlő. Ez két részből áll, az első egy háromszög területe: $\frac{10\,\mathrm{s}\cdot 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} = 100\,\mathrm{m}$, a másik egy téglalapé: $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 20\,\mathrm{s} = 400\,\mathrm{m}$. A teljes megtett út tehát 500 m.



2.41. ábra. Utazósebességre gyorsító autó út–idő grafikonja



2.42. ábra. Az autó sebessége az idő függvényében

29. feladat ⋆ [KözFiz, 54.]

Egy 10 $\frac{m}{s^2}$ gyorsulással, egyenes vonalú pályán mozgó test sebessége a pálya egy pontjában 2 $\frac{m}{s}$, egy másik pontjában 4 $\frac{m}{s}$ nagyságú.
Mekkora a két pont között a távolság?

Megoldás:

Mivel a feladatban sebességek adottak, s a kezdeti helyekről semmit sem tudunk, kivételesen első lépésként rajzoljuk fel a sebesség–idő grafikont!

A 2.43. ábrán látható grafikon pozitív meredekségű egyenes, mert a gyorsulás pozitív és állandó nagyságú.

A 2 $\frac{m}{s}$ sebességhez tartozó időpontot jelöljük t_0-lal. Mivel a gyorsulás 10 $\frac{m}{s^2}$, 1 másodperc múlva, $t_0 + 1\,\mathrm{s}$ pillanatban a sebesség 12 $\frac{m}{s}$ lesz. A grafikonról leolvasható, hogy a 4 $\frac{m}{s}$ sebességhez tartozó időérték így $t_0 + \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$.

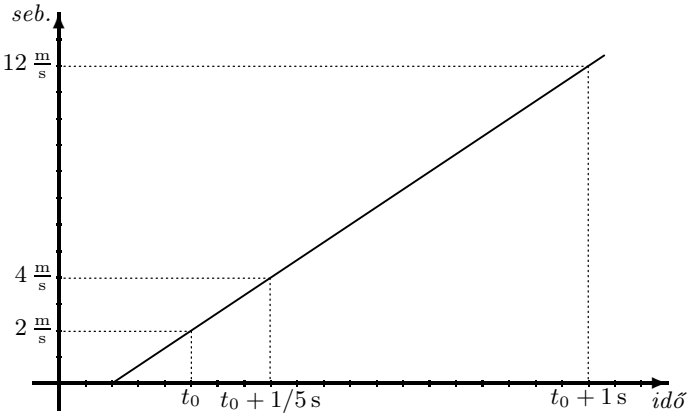
A keresett út a grafikon alatti terület t_0-tól $t_0 + \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$-ig terjedő, négyszög alakú részének nagysága. Ez $\frac{1}{5}\,\mathrm{s} \cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \frac{\frac{1}{5}\,\mathrm{s} \cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} = 0,6\,\mathrm{m}$.

30. feladat ⋆ [SzkiÖF, 1.35.]

Az autópályán 90 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladó autó egyenletesen fékezve 100 m-es vízszintes úton fékezhető le.
Mekkora út megtétele után csökken a jármű sebessége az eredeti érték felére?

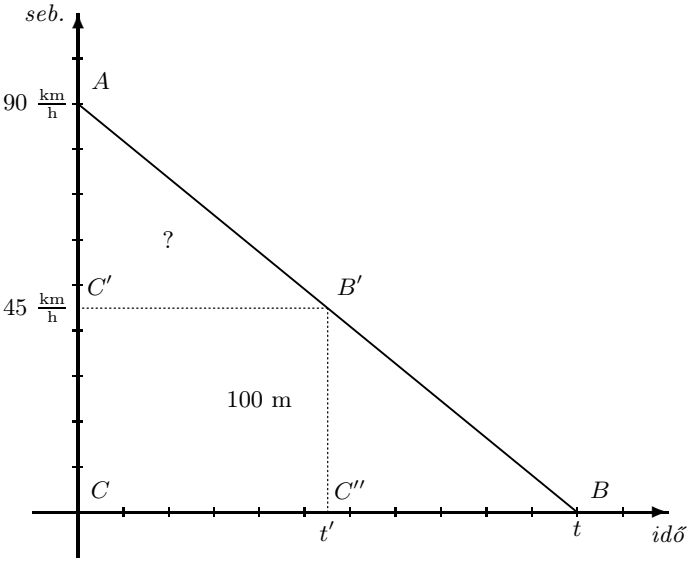
Megoldás:

Ábrázoljuk az autó sebességének változását az idő függvényében!



2.43. ábra. Kétszeres sebesség – mennyi utat tett meg közben a test?

Mivel a sebesség 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ értékről egyenletesen zérusra csökken, a sebesség változását negatív meredekségű egyenes mutatja (2.44. ábra).



2.44. ábra. Fékező autó sebességének változása

A grafikonról leolvasható, hogy 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel éppen t' pillanatban halad az autó. A grafikonon ezt a pillanatot B' pont jelzi. A megtett utat a B' ponttal kettéosztott grafikon alatti területek adják. Az ABC háromszög területe 100 m a feladat szövege szerint. A feladat kérdésére a választ az $AB'C''C$ négyszög területének kiszámításával adhatjuk meg.

Látható, hogy $AB'C'\triangle$ és $ABC\triangle$ hasonlóak. Oldalaik aránya 1 : 2, területük aránya tehát 1 : 4. Mivel $AB'C'\triangle$ és $B'BC''\triangle$ egybevágó, mindkettő területe 100 m / 4 = 25 m. Ezek szerint 25 m-en csökken a sebesség 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ról 0-ra, tehát 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ról 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra 75 m hosszú úton lassult le az autó.

31. feladat [FFF, 44.]

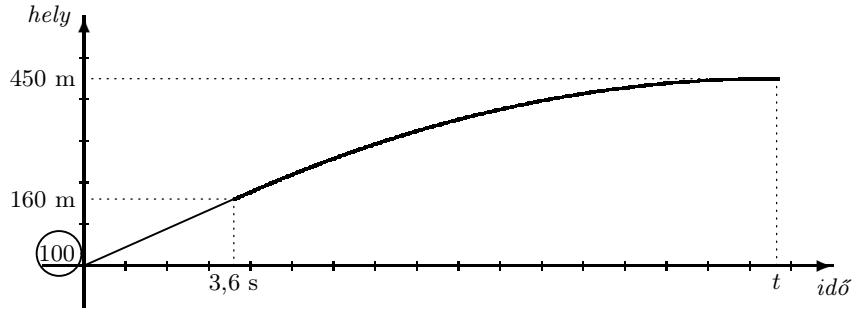
Egy gépkocsi 160 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel száguld el az autópályán a 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-t jelző sebességkorlátozó tábla mellett. 3,6 másodperc múlva hirtelen fékezni kezd. A kiérkező rendőrök a féknyomról megállapítják, hogy az autó 290 m hosszú úton állt meg. Feltételezve, hogy a lassulás egyenletes volt, mennyi idő alatt állt meg az autó, és mekkora volt a gyorsulása?

Megoldás:

Kezdjük a feladat megoldását az út–idő grafikon megrajzolásával. A koordináta-rendszert úgy helyezzük

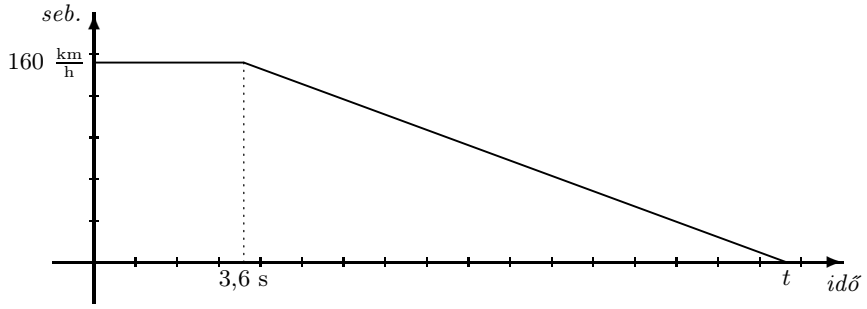
el, hogy origóját a figyelmen kívül hagyott táblához helyezzük, az elmozdulástengely irányát pedig az autó mozgásának irányába állítjuk. Az időmérést akkor kezdjük, amikor az autós a tábla mellett elsuhan.

3,6 s (0,001 óra) idő alatt 160 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 160 m utat tett meg az autó: ezt a szakaszt pozitív meredekségű egyenes ábrázolja a 2.45. ábrán. Ekkor elkezd fékezni, s így további 290 m-t halad, s ezzel a táblától 450 m távolságra kerül. Ezt a második szakaszt az egyenletes mozgás grafikonjához törés nélkül illeszkedő parabolaív jelzi. (A diákok gyakori hibája, hogy az ábrát a két típusú mozgás váltásakor töréspontal rajzolják.) A parabola fordított helyzetű, azaz érintője egyre laposabb. A test a parabola csúcsában áll meg (itt ugyanis a sebesség nulla, azaz a parabola érintője vízszintes). Jelöljük a megállás pillanatát t-vel!



2.45. ábra. A baleset eseményei az út–idő diagramon

Rajzoljuk most meg a sebesség–idő grafikont. A mozgás első szakaszát egy vízszintes egyenessel ábrázolhatjuk, míg a második, fékezési szakasz képe negatív meredekségű egyenes lesz (2.46. ábra).



2.46. ábra. Az autó sebességének változása

A grafikon alatti terület adja a megtett utat. Elég most csak a második szakaszra vizsgálni a ferde vonal alatti háromszög alakú területet: tudjuk, hogy ez 290 m.

$$\frac{160\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot(t-0,001\,\text{óra})}{2}=0,290\,\text{km}.$$

Ebből

$$t=0,004625\,\text{óra}=16,65\,\text{s}.$$

A fékezéssel töltött idő tehát $16,65\,\text{s}-3,6\,\text{s}=13,05\,\text{s}$. Mivel ezalatt az idő alatt a sebességváltozás $-160\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=-44,4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a gyorsulás értéke:

$$a=\frac{-44,4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{13,05\,\text{s}}\approx-3,4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

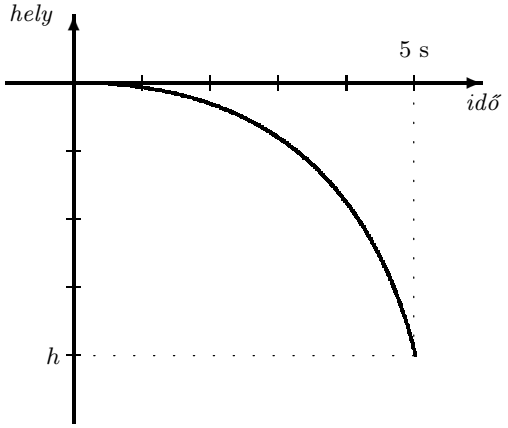
A negatív előjel azt jelzi, hogy az autó lassult, sebessége csökkent.

32. feladat [FFF, 41.]

Milyen mély az a szakadék, amelynek széléről a leejtett kő 5 másodperc alatt ér le a szakadékba? A nehézségi gyorsulás 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

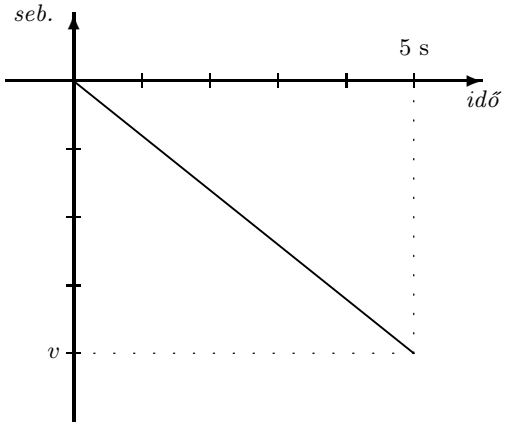
Megoldás:

Először rajzoljunk út–idő diagramot (2.47. ábra)! A koordináta-rendszer elmozdulástengelye a szakadék pereménél indul, és a pozitív irány függőlegesen felfelé mutat, az időt pedig a kő ejtésének pillanatában kezdjük mérni. A szakadék mélységét jelöljük h-val.



2.47. ábra. A szakadékba eső kő helyzete az idő függvényében

A sebesség–idő grafikonon (2.48. ábra) a mozgást egy egyenes jelzi, mivel a sebesség változása egyenletes. Az elért sebességet jelölje v.



2.48. ábra. A kő sebesség–idő grafikonja

A szakadék mélységét a grafikon „alatti” terület adja. Ez itt most a grafikon egyenese felett van, ezért előjele negatív: ez jelzi, hogy mélységről, és nem magasságról van szó. Az elért maximális sebesség: $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{s} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A szakadék mélysége:

$$h = \frac{5\,\mathrm{s} \cdot 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} = 125\,m.$$

33. feladat $\boxed{\mathrm{K}}$

Vizsgáljuk meg az első emeleti ablakból egyszerre kiejtett focilabda és hasonló méretűre felfújt játék léggömb esését!

Megoldás:

A feladatot videokamera segítségével kényelmesen megoldhatjuk. Készítsünk videofelvételt a mozgásról úgy, hogy a kamera viszonylag távol van az esésvonaltól! Figyeljünk arra, hogy a képmezőbe az egész ejtési távolság egyszerre beleférjen! Mérjük meg az ejtési magasságot hosszú zsineg végére kötött nehezék leengedésével!

A videofelvételt az osztályteremben „kockázva” játsszuk vissza, és így értékeljük ki. A kamera 0,02 másodpercenként készít egy felvételt. Négyfejes (fél-professzionális) videomagnó egyenként tudja kimerevíteni az egymást követő képeket, s a kockázott kép elfogadható minőségű állókép. A TV képernyőjére „tapasszunk” írásvetítő fóliát és filctollal jelöljük be az esési távolságot, majd kb. 5-10 kockánként a mozgó test pillanatnyi helyzetét. (Elég egyetlen pont megjelölése, ez lehet pl. a gömb legalsó vagy legfelső pontja. Az időszakaszok nagysága legalább akkora legyen, hogy a mozgó test helyzetét jelölő pontok egymástól jól megkülönböztethetők legyenek.) A fóliát levéve a képernyőről mérjük le a test egymást követő elmozdulásadatait és ezt számítsuk át a kísérlet helyszínén lemért esési távolsághoz arányítva valós adatokká!

A focilabda mozgása jó közelítéssel tiszta szabadesés. A mozgás út–idő grafikonja egy fordított helyzetű parabola. A gyorsulást a sebesség–idő grafikon meredeksége adja. Ennek meghatározásához a mozgás valamely tetszés szerinti szakaszának átlagsebessége ad segítséget (az átlagsebességet az út–idő grafikonra berajzolt szelő meredeksége adja). Ábrázoljuk az átlagsebességet a sebesség–idő grafikonon a vizsgált időszakasz középidejéhez rendelve! A pontot az origóval összekötve adódik az egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség–idő diagramja. A grafikon meredeksége a mozgás gyorsulása, a focilabda esetében kb. 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

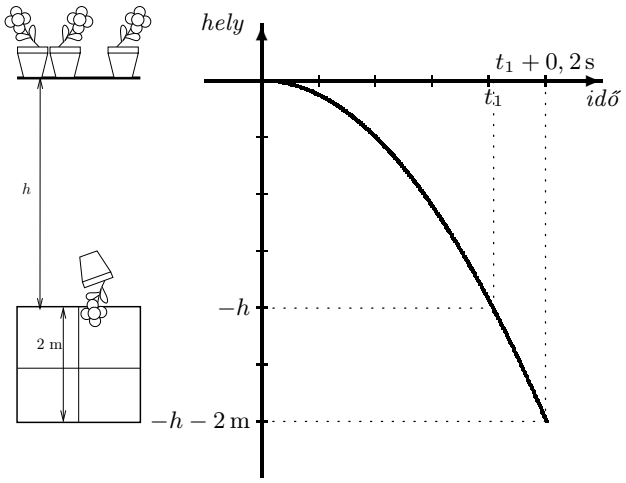
A leeső léggömb lassabban esik, mint a labda. Az út–idő grafikont elkészítve látjuk, hogy mozgása az első rövid szakasz után egyenletesnek tekinthető. A kísérlet értelmezéséhez a dinamika tanítása során érdemes röviden visszatérni.

Megjegyzések. Video-lejátszó helyett videoeditort használva egyes képpontok megjelölhetők, a felvétel feldolgozása egyszerűbbé válik. Az ismertetett technikával, videofelvételek segítségével természetesen bármely mozgás vizsgálható (pl. a rajtoló futó, az induló kerékpár, autó, vonat mozgása), de a nagy időfelbontás miatt ezt a gyors mozgásokra érdemes alkalmazni.

34. feladat ⋆

Egy két méter magas ablak fölött, egy felsőbb emeleti ablakban cserepes virágok állnak. Az egyik cserép leesik. A lenti ablak előtt 0,2 s idő alatt suhan el a virágcserép.
Milyen magasról esett le a cserép?

Megoldás:



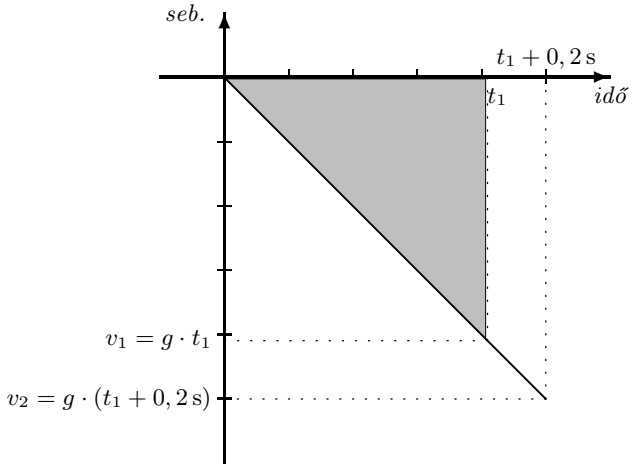
2.49. ábra. A leeső cserép mozgása az út–idő diagramon

A 2.49. ábrán látható a zuhanó cserép. Jelöljük a cserepek távolságát az ablaktól h-val.

Rögzítsük a koordináta-rendszert az ablakpárkányon maradó cserepekhez, a pozitív irány mutasson függőlegesen felfelé! Így a cserép negatív irányba, negatív gyorsulással mozog az alsó ablak felé. Tudjuk, hogy h távolság megtétele után a következő 2 m-t 0,2 s alatt teszi meg.

Az időt kezdjük akkor mérni, mikor a cserép zuhanni kezd. Az ablak felső peremét t_1 időpontban, az alsót $t_2 = t_1 + 0,2\,\mathrm{s}$ időpontban éri el a virág.

Rajzoljuk fel az út–idő grafikont! A 2.49. ábrán láthatjuk a leeső cserép mozgását. Ennek alapján nem tudjuk megmondani h érékét, ezért rajzoljuk fel a sebesség–idő diagramot is (2.50. ábra)! Ezen a rajzon a sötétítéssel kiemelt, háromszög alakú terület értéke adja a h magasságot, míg az azt követő, trapéz alakú terület nagysága az ablak mérete, 2 m.



2.50. ábra. A leeső cserép sebesség–idő grafikonja

A trapéz alakú terület:

$$\frac{[g \cdot t_1 + g \cdot (t_1 + 0,2\,\mathrm{s})] \cdot 0,2\,\mathrm{s}}{2} = 2\,\mathrm{m}.$$

Ebből t_1 értékét meghatározhatjuk: $t_1 = 0,9\,\mathrm{s}$. A keresett h távolság a háromszög alakú terület nagysága:

$$h = \frac{g \cdot t_1 \cdot t_1}{2} = 4,05\,\mathrm{m}.$$

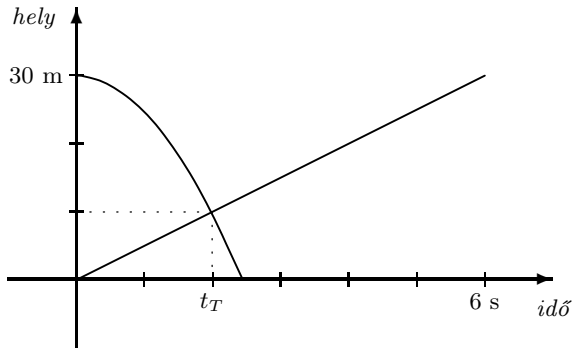
35. feladat ⋆ [KözFiz, 109.]

Egy lift 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ állandó sebességgel emelkedik. A lift felett 30 m magasról leejtünk egy követ. Mennyi idő múlva találkozik a lift a kővel?

Megoldás:

Rajzoljuk fel először az út–idő grafikont. A koordináta-rendszer hely-tengelyének nullpontja legyen az a hely, ahol a lift van a kő elengedésének pillanatában, az időmérést pedig szintén ebben a pillanatban kezdjük el. A kő a megadott sebességgel a 30 m-es utat 6 s alatt teszi meg. Jelöljük a találkozás idejét t_T-vel!

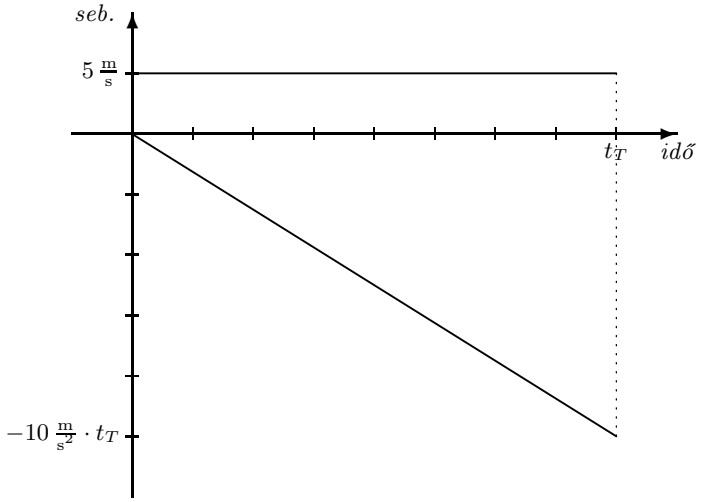
Ha a rajzot pontosan készítjük, akkor látható, hogy a találkozás a kő elengedése után 2 s-mal történik (2.51. ábra). A parabolát azonban a kívánt pontossággal igen nehéz felrajzolni, így ezt a rajzot és a leolvasott értéket legfeljebb csak a végeredmény ellenőrzésére használhatjuk.



2.51. ábra. A lift és a kő

Ahhoz, hogy elkerüljük a másodfokú függvény ábrázolását, rajzoljuk fel a lift és a kő sebességét az idő függvényében (2.52. ábra). Legyen $t = 0$ az a pillanat, amikor a követ elengedjük! A használt vonatkoztatási rendszerben a nehézségi gyorsulás iránya negatív, tehát a lift sebessége pozitív. A nehézségi gyorsulás $-10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, ezért a kő grafikonjának meredeksége a $-10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a kő sebessége a találkozáskor $-10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t_T$.

A megtett utakat a grafikon alatti területtel számíthatjuk ki. Nehézséget okozhat, hogy a kő grafikonja „alatti” terület a grafikon felett van. Ezt az ellentmondást úgy oldhatjuk fel, hogy ezt a területet negatívnak tekintjük. Ekkor a kezdeti távolság plusz ez a negatív távolság egyenlő a lift által megtett pozitív úttal. De másféleképpen is gondolkodhatunk. Mondhatjuk azt is, hogy számítsuk pozitívnak mindkét utat, azaz mindkét



2.52. ábra. A lift és a kő sebességének változása az idő függvényében

területet (a lift grafikonja alatti és a kő grafikonja feletti területeket), ekkor a két út összege adja a kezdeti 30 m-es távolságot. Bármelyiket is választjuk, a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t_T+\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t_T\cdot t_T}{2}=30\,\mathrm{m}$$
$$t_T\frac{1}{\mathrm{s}}+t_T\cdot t_T\frac{1}{\mathrm{s}^2}=6$$
$$t_T\,\mathrm{s}+t_T\cdot t_T=6\,\mathrm{s}^2$$
$$t_T(1\,\mathrm{s}+t_T)=6\,\mathrm{s}^2$$

Az utolsó egyenletből $t_T=2\,\mathrm{s}$, mert $2\,\mathrm{s}\cdot 3\,\mathrm{s}=6\,\mathrm{s}^2$.

A találkozás tehát a kő elengedése után 2 másodperccel történik.

36. feladat ⋆ [FFF, 42.]

Egy hideg napon egy hőlégballon lebeg a Balaton felett. Elkezd egy kicsit süllyedni, ezért kiejtenek belőle egy homokzsákot. Ennek hatására a ballon azonnal megáll a levegőben. A zsák csobbanását a kidobás után 9 másodperccel hallják a kosárban ülő emberek. A nehézségi gyorsulás 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a hang terjedési sebessége 320 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Milyen magasan lebeg a ballon?

Megoldás:

Rajzoljuk meg az út–idő grafikont! A koordináta-rendszer időtengelyének kiinduló pillanata a zsák kidobása, az elmozdulástengely a ballontól a Balaton felé mutató, függőleges egyenes; nullapontja a Balaton vízszintjénél van. Legyen a pozitív irány függőlegesen felfelé; a már megállt ballon helyét jelölje h, a zsák leérkezésének pillanatát t.

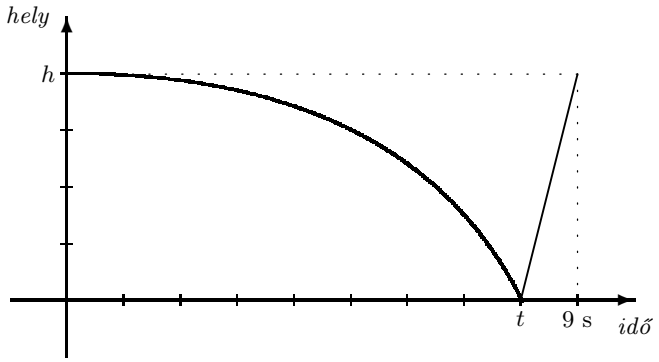
A zsák mozgását egy lefelé álló parabolaív ábrázolja (2.53. ábra), mert a zsák mozgása a választott rendszerben negatív gyorsulású. Az ív a parabola csúcspontjából indul, mert a zsákot nem dobják ki, csak elengedik, azaz a kezdősebesség nulla. A hanghullám a víz szintjétől egyenletes sebességgel haladva jut vissza a ballonhoz: mozgásának képe ezért pozitív meredekségű egyenes.

Rajzoljuk meg a sebesség–idő grafikont is! Két vonalat rajzolunk. Az egyik negatív meredekségű, az origóból indul: a zsák mozgását mutatja. A másik vízszintes: a hang egyenletes mozgását jelzi (2.54. ábra). Az előbbi feletti, illetve az utóbbi alatti terület egyaránt a ballon és a tó távolságával, h-val egyenlő. A zsák által elért maximális sebesség v.

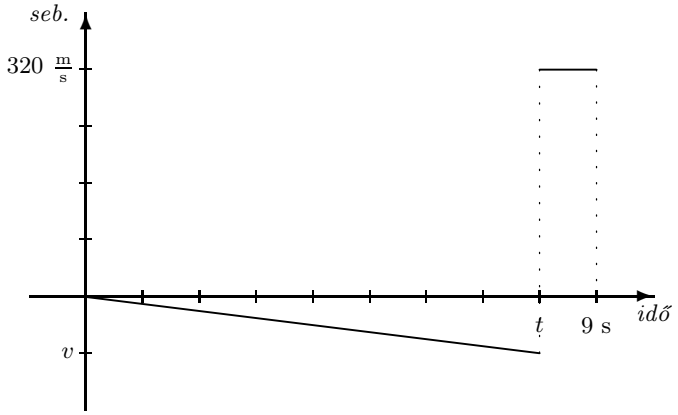
A zsák által elért sebesség: $v=10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t$.

A két terület (egy háromszög és egy téglalap területe) tehát megegyezik:

$$\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t\cdot t}{2}=320\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot(9\,\mathrm{s}-t).$$



2.53. ábra. A zsák és a csobbanás hangja az út–idő diagramon



2.54. ábra. A léghajó és a hang sebessége

Ezt az egyenletet átalakítva:

$$t \cdot (t + 64\,\mathrm{s}) = 576\,\mathrm{s}^2,$$

továbbá

$$t \cdot (t + 64\,\mathrm{s}) = 8 \cdot 72\,\mathrm{s}^2.$$

Innen látható, hogy $t = 8\,\mathrm{s}$ kielégíti az egyenletet.

A zsák által elért sebesség tehát $v = 8\,\mathrm{s} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a ballon pedig $h = 320\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (9\,\mathrm{s} - 8\,\mathrm{s}) = 320\,\mathrm{m}$ magasan van.

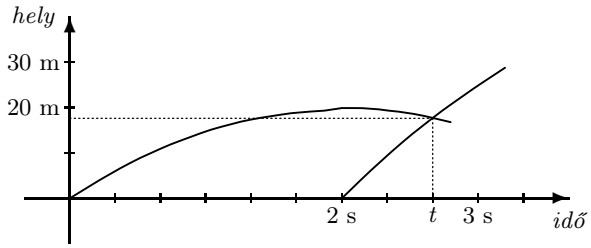
37. feladat [SzkiÖF, 3.68.]

Egy követ függőlegesen felfelé dobunk 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ kezdősebességgel, majd 2 s múlva utána dobunk egy másik követ 30 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ kezdősebességgel.
Határozzuk meg találkozásuk idejét!

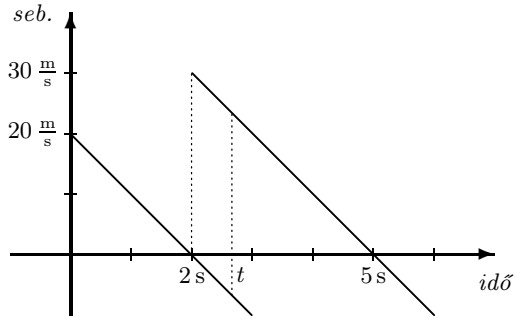
Megoldás:

Először rajzoljuk meg a történések út–idő grafikonját! A helyet az eldobás helyétől fölfelé mérjük, az időmérés kezdete az első kő eldobásának pillanata. A 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel feldobott kő 20 m, a 30 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel eldobott pedig 45 m magasra emelkedik. Jelöljük a találkozás időpontját t-vel! A garfikont a 2.55. ábrán láthatjuk.

Rajzoljuk meg a két kő sebesség–idő grafikonját! A sebességek folyamatosan és egyenletesen csökkennek, mégpedig egyforma mértékben, hiszen a két kő gyorsulása megegyezik. Ezért a 2.56. ábra grafikonján két párhuzamos, negatív meredekségű egyenes látható. Az egyenesek metszik az időtengelyt, mivel a sebességek pozitív értékről zérusra csökkennek, majd negatívak lesznek (a mozgás iránya megfordul). A találkozás az első kő mozgásának irányváltása után történik.



2.55. ábra. A két kő helye az idő függvényében



2.56. ábra. A két kő sebességének változása

A találkozásig a két kő által megtett út – ami a grafikon alatti területből olvasható le – egyenlő. Az időtengely feletti területek előjele pozitív, az alatta lévőké negatív. Így az első kő által megtett út úgy számítható, hogy az első, időtengely feletti háromszög területéből levonjuk a második, időtengely alatti háromszög területét. A második kő által megtett út a második ferde egyenes, a két pontozott vonal és az időtengely által határolt négyszög területe. Ez a két út egyenlő, azaz:

$$\frac{2\,\mathrm{s}\cdot 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} - \frac{(t-2\,\mathrm{s})(t-2\,\mathrm{s})\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} = \frac{3\,\mathrm{s}\cdot 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2} - \frac{(5\,\mathrm{s}-t)(5\,\mathrm{s}-t)\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}$$

$$t = \frac{8}{3}\,\mathrm{s}.$$

Tehát az első kő eldobása után $\frac{8}{3}$ másodperccel találkozik a két kő.

2.3. Dinamikai feladatok

38. feladat

A 23. feladatban szereplő futó mekkora erőt fejt ki a lábaival a gyorsítás során? Mekkora tapadási súrlódási együtthatóra van ehhez szükség a cipő és a talaj között?

Megoldás:

Ha a 23. feladatban mérési eredményünk a futó gyorsulására $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, és a futó tömege 60 kg, akkor Newton II. törvénye szerint a gyorsító erő 120 N. Ezt az erőt a futó lábának izmaival fejti ki, de a gyorsulás csak tapadási súrlódási erő közvetítésével valósul meg. A súrlódási erő lehetséges legnagyobb értéke $\mu_0 \cdot F_{\text{nyomó}}$, ahol $F_{\text{nyomó}}$ a felületeket összenyomó erő, esetünkben a futó súlya: 600 N. Ebből a μ_0 együttható minimális lehetséges értéke: $\mu_0 \geq \frac{120\,\mathrm{N}}{600\,\mathrm{N}} = 0,2$. A *Függvénytáblázat* adatai szerint gumi és aszfalt között μ_0 értéke $0,3\ldots0,5$, tehát teljesül a kívánt feltétel.

39. feladat ⋆

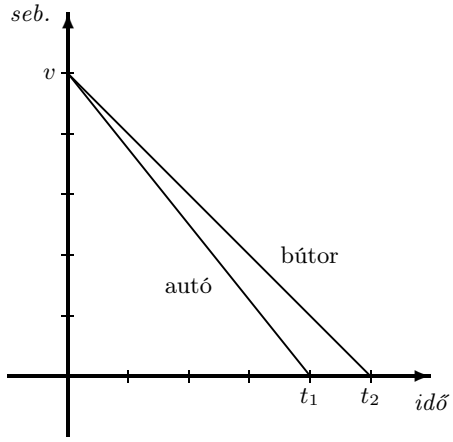
Egy hosszú platós teherautó a plató végére helyezett, 50 kg tömegű bútort szállít. 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad, amikor megjelenik előtte egy pöttyös labda. A sofőr természetesen fékezni kezd, és egyenletes, 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nagyságú lassulással megállítja a járművet. A plató és a bútor közti csúszó súrlódási tényező 0,4. Milyen messzire csúszott el e fékezéskor a platón a bútor?

Megoldás:

Ha a teherautó haladási iránya a pozitív irány, akkor sebessége is pozitív. Pozitív sebesség csökkenése negatív gyorsulást jelent, így a teherautó gyorsulása $a_1 = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Számítsuk ki a bútor gyorsulását is! A bútordarabot a plató és a közte fellépő súrlódási erő lassítja. Ez az erő esetünkben $-500\,\text{N} \cdot 0,4 = 200\,\text{N}$. (A negatív előjel azt jelzi, hogy az erő az autó haladási irányával ellentétes irányba mutat.) Ez fékezi az 50 kg tömegű testet, így ennek gyorsulása Newton II. törvénye szerint $a_2 = -4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Az autó és rakománya is $v = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességről kezd lassulni, és mindkettő sebessége nullára csökken. A teherautó megállításához $t_1 = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2\,\text{s}$ időre van szükség, a láda viszont csak $t_2 = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2,5\,\text{s}$ idő alatt áll meg.

Rajzoljuk fel ezek alapján a sebesség–idő grafikont!



2.57. ábra. A teherautó és rakománya a sebesség–idő diagramon

A 2.57. ábrán a sebesség–idő grafikon alatti terület a megtett út. A bútor annyit csúszott előre a platón, amennyivel hosszabb úton állt meg, mint az autó. Így a keresett útkülönbség:

$$\Delta s = \frac{v \cdot t_2}{2} - \frac{v \cdot t_1}{2} = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,5\,\text{s}}{2} - \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\,\text{s}}{2} = 2,5\,\text{m}.$$

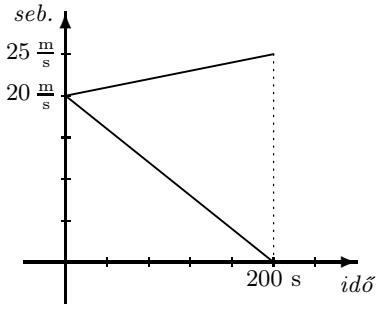
40. feladat ⋆ [KözFiz, 361.]

500 t tömegű vonat 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad olyan sínen, ahol $\mu = 0{,}01$. Menet közben a szerelvény végéről leszakad egy 100 t tömegű rész. A mozdony húzóereje ezután is változatlan. Mekkora távolságban van a két vonatrész a hátsó rész megállásának pillanatában?

Megoldás:

A vonat kezdetben egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ezért tudjuk, hogy a rá ható erők eredője nulla, a mozdony húzóereje épp kiegyenlíti a súrlódási ellenállást. A szétszakadás után a mozdony húzóereje nem változik, de a súrlódási ellenállás ötödével csökken. Ezért a szerelvény gyorsul, a leszakadt rész pedig a megállásig lassul. Az az erő, ami az első részt gyorsítja, éppen akkora, mint a hátsóra ható súrlódási erő, azaz $0,01 \cdot 100\,\text{t} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10\,000\,\text{N}$. Ekkora erő fékezi a hátsó részt, és ekkora erő gyorsítja az elsőt. A gyorsulások ezért Newton II. törvénye szerint: $a_{\text{első}} = 0,25 \cdot 0,01 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,025\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, illetve $a_{\text{hátsó}} = -0,01 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0,1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rajzoljuk meg a vonat mozgásának sebesség–idő diagramját! Mindkét rész sebessége kezdetben $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, majd az első részé kismértékben növekszik, a hátsó részé pedig meredekebben nullára csökken. Ez utóbbi ideje a $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebesség és a már ismert gyorsulás segítségével meghatározható: 200 s.



2.58. ábra. A szétszakadó vonat részeinek sebessége

A 2.58. ábrán már ezt az időértéket is feltüntettük. Mivel a szerelvény elejének gyorsulását ugyanezen az időtartamon vizsgáljuk, az elért végsebesség 25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A megtett út a sebesség-grafikon alatti terület: a kívánt távolság tehát a két terület különbsége. Ennek nagysága a két grafikon-szakasz által meghatározott háromszög területe:

$$\Delta s = \frac{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 200\,\mathrm{s}}{2} = 2500\,\mathrm{m}.$$